

WISKUNDE

2025 WINTER KLASSE

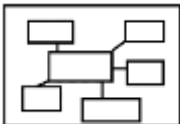





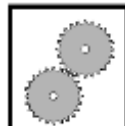

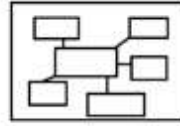





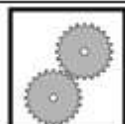

GRAAD 12

KWARTAAL 2

HANDLEIDING VIR ONDERWYSERS EN LEERDERS



IKON BESKRYWING

 <p>BREINKAART</p>	 <p>EKSAMEN RIGLYN</p>	 <p>INHOUD</p>	 <p>AKTIWITEITE</p>
 <p>BIBLIOGRAFIE</p>	 <p>TERMINOLOGIE</p>	 <p>UITGEWERKTE VOORBEELDE</p>	 <p>STAPPE</p>
 <p>BREINKAART</p>	 <p>EKSAMEN RIGLYN</p>	 <p>INHOUD</p>	 <p>AKTIWITEITE</p>
 <p>BIBLIOGRAFIE</p>	 <p>TERMINOLOGIE</p>	 <p>UITGEWERKTE VOORBEELDE</p>	 <p>STAPPE</p>



INHOUD

BLADSY

FUNKSIES EN GRAFIEKE

A) INHOUD EN VOORBEELDE

4 – 38

B) AKTIWITEITE

39 – 45

DIFFERENSIAAL REKENING

A) INHOUD EN VOORBEELDE

46 – 57

B) AKTIWITEITE

58 – 63

WAARSKYNNLIKHEID

A) INHOUD EN VOORBEELDE

64 – 76

B) AKTIWITEITE

77 – 80

BYLAAG A: INLIGTINGSBLAD

81

BYLAAG B: EKSAMENRIGLYNE

82

BIBLIOGRAFIE

83

FUNKSIES EN GRAFIEKE

Oorsig:

<p>1. Hersien werk oor die invloed van die parameters a en q en ondersoek die invloed van p op die grafieke van die funksies gedefinieer deur:</p> <p>1.1. $y = f(x) = a(x + p)^2 + q$</p> <p>1.2. $y = f(x) = \frac{a}{x + p} + q$</p> <p>1.3. $y = f(x) = ab^{x+p} + q$ waar $b > 0, b \neq 1$</p>	<p>2. Ondersoek numeries die gemiddelde gradiënt tussen twee punte op 'n kurwe en ontwikkel 'n intuitiewe begrip van die konsep van die helling van 'n kromme by 'n punt.</p>	<p>1. Definisie van 'n funksie.</p> <p>2. Algemene konsep van die inverse van 'n funksie en hoe dit nodig mag wees om die gebied van die funksie te beperk (om 'n een-tot-een funksie te kry) om te verseker dat die inverse 'n funksie is.</p> <p>3. Bepaal en skets die grafieke van die inverses van die funksies gedefinieer deur</p> <p>$y = ax + q; y = ax^2$ $y = b^x; (b > 0, b \neq 1)$</p> <p>Fokus op die volgende eienskappe:</p> <p>Die gebied en die terrein, afsnitte met die asse, draaipunte, minimum en maksimum, waarders, asimptote (horisontale en vertikale), vorm en simmetrie, gemiddelde gradiënt (gemiddelde tempo van verandering), intervale waarop die funksie toeneem/afneem.</p>
--	---	---

(BRON: KURRIKULUM – EN - ASSESSERINGBELEIDSVERKLARING(KABV) VOO fase GRADE (10 – 12) WISKUNDE)

Belangrike terminologie

Definisieversameling (Gebied) : die stel moontlike x -waardes	} Vir alle funksies	
Waardeversameling (Terrein) : die stel moontlike y -waardes		
Simmetrie-as	: 'n denkbeeldige lyn wat die grafiek in twee spieëlbeelde van mekaar deel.	} Sien die hiperbool en parabool
Maksimum:	die hoogste moontlike y -waarde van 'n funksie	
Minimum:	die laagste moontlike y -waarde van 'n funksie	} Sien die parabool
Asimptoot:	'n denkbeeldige lyn wat 'n grafiek nader maar nooit raak nie.	
Draaipunt:	Die punt waar 'n grafiek sy maksimum of minimum bereik en van rigting verander	} Sien die hiperbool en eksponensiale funksie
		Sien die parabool

Die konsepte van toename en afname in funksies: alle funksies : all functions

- Die funksie NEEM TOE wanneer die waarde van y toeneem soos die waarde van x toeneem van links na regs
 - DIE GRAFIEK GAAN OP**
- Die funksie NEEM AF wanneer die waarde van y afneem soos die waarde van x toeneem van links na regs
 - DIE GRAFIEK GAAN AF**

AFDELING 1: LINEÛRE FUNKSIE (REGUIT LYN)

Die grafiek van $y = mx + c$

Standaardvorm van
lineêre funksie

WAAR

$m = \text{gradiënt}$

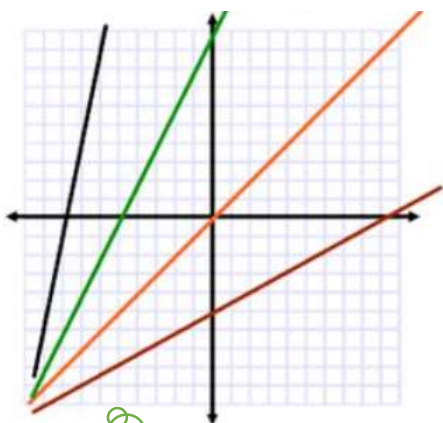
Wanneer $m > 0$ (**gradiënt is positief**) en
 $m < 0$ (**gradiënt is negatief**)

Definisieversameling (Gebied) : $x \in R$

Waardeversameling (Terrein) : $y \in R$

Vorm

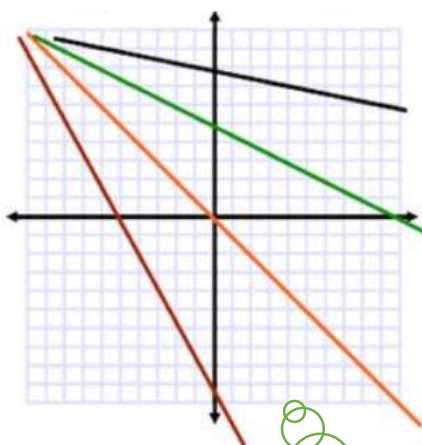
Positiewe Helling



Wanneer $m > 0$

1. Die gradiënt is positief
2. Die funksie is toenemend

Negatiewe Helling



Wanneer $m < 0$

3. Die gradiënt is negatief
4. Die funksie is dalend /
neem af

Voorbeeld 1

Skets die grafiek van $y = 2x - 1$ en bepaal die Definisie- en Waardeversamelings van die funksie, en meld of die funksie toenemend of dalend is.

Oplossing

x – afsnit: stel $y = 0$

$$0 = 2x - 1$$

$$-2x = -1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}; 0\right)$$

y – afsnit: stel $x = 0$

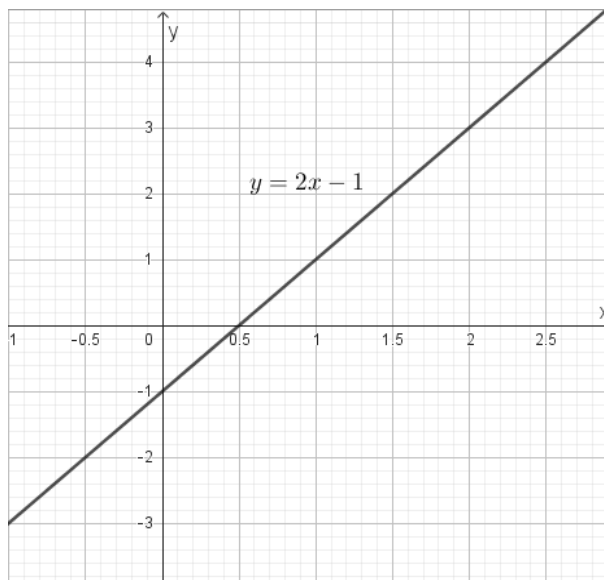
$$y = 2(0) - 1$$

$$y = -1$$

$$\therefore (0; -1)$$

Gebied: $x \in R$

Terrein: $y \in R$

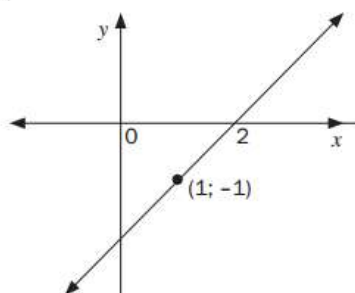


Die funksie is toenemend

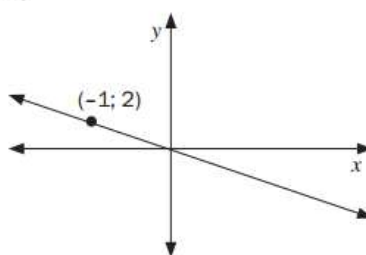
Voorbeeld 2

Determine the equations of the following graphs:

1.



2.



Oplossings

1.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-1 - 0}{1 - 2}$$

$$a = 1$$

$$\therefore y = 1x + c$$

$$0 = 1(2) + c$$

$$c = -2$$

$$y = x - 2$$

2.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{2 - 0}{-1 - 0}$$

$$a = -2$$

$$\therefore y = -2x + c$$

$$0 = -2(0) + c$$

$$c = 0$$

$$y = -2x$$

AFDELING 2: HIPERBOLIESE FUNKSIE (HIPERBOOL)

Die grafiek van $y = \frac{a}{x+p} + q$ • • • • • Standaardvorm van hiperbool

neem kennis dat: $y = \frac{2}{x-2} + 1$

$$= \frac{2}{x + (-2)} + 1$$

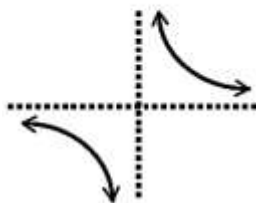
Die vergelykings van die asimptote is: $x = -p$ (**vertikale asimptoot**) en
 $y = q$ (**horisontale asimptoot**)

Definisieversameling (Gebied) : $x \in R, x \neq -p$

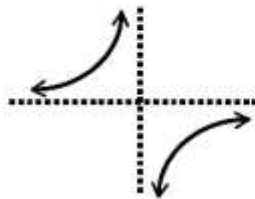
Waardeversameling (Terrein) : $y \in R, y \neq q$

Vorm

As $a > 0$ dan neem die grafiek af vir alle $x < 0$ of $x > 0$



As $a < 0$ dan neem die grafiek toe vir alle $x < 0$ of $x > 0$



Die vergelykings van die simmetrie-asse

Die hiperbool het twee vergelykings vir simmetrie

$m = 1$	$m = -1$
$y = x + c$	$y = -x + c$

N.B Die grafieke van die simmetrie-asse van die hiperbool gaan deur die snypunt van die asimptote, $(-p; q)$.

In die algemeen vir die hiperbool, word die vergelykings van die simmetrie-asse deur die volgende formules gegee:

$m = 1$	$m = -1$
$y = (x + p) + q$	$y = -(x + p) + q$
$\therefore y = x + p + q$	$\therefore y = -x - p + q$

NB – Maak seker dat die hiperbool in standaardvorm is voordat formule toegepas word

Voorbeeld 1

Skets die grafiek van $y = \frac{10}{x+2} - 3$, skryf die gebied en terrein van die funksie neer, en skryf die vergelykings van die asimptote neer. Meld of die grafiek stygend/toenemend of dalend/afnemend is. Laastens, bepaal die vergelyking van die simmetrie-as met 'n positiewe gradiënt.

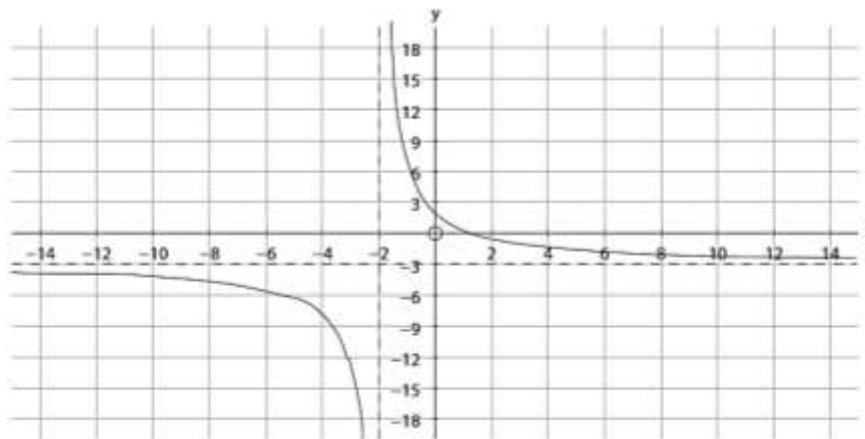
Oplossings

Die asimptote is $x = -2$ en $y = -3$ (Dit word gelees vanaf die vergelyking)

x-afsnit: Laat/Stel: $y = 0$

$$0 = \frac{10}{x+2} - 3 \therefore 10 = 3(x+2) \therefore 3x = 4 \therefore x = \frac{4}{3}$$

y-afsnit: stel $x = 0$ $y = \frac{10}{0+2} - 3 = 5 - 3 = 2$



Grafiek nie volgens skaal geteken nie.

Gebied: $x \in R, x \neq -2$

Terrein: $y \in R, y \neq -3$

Die funksie neem af / dalend

Vergelyking van die simmetrie-as met positiewe gradiënt:

$$y = x + c$$

$$-3 = -2 + c$$

$$c = -1$$

$$\therefore y = x - 1$$

Voorbeeld 2

Skets die grafiek van $y = -1 - \frac{8}{x-4}$, en skryf die gebied en terrein van die funksie neer. Bepaal die vergelyking van die simmetrie-as met 'n negatiewe gradiënt.

Oplossing

Hierdie vergelyking kan ook geskryf word as $y = \frac{-8}{x-4} - 1$

Asimptote: $x = 4$ en $y = -1$

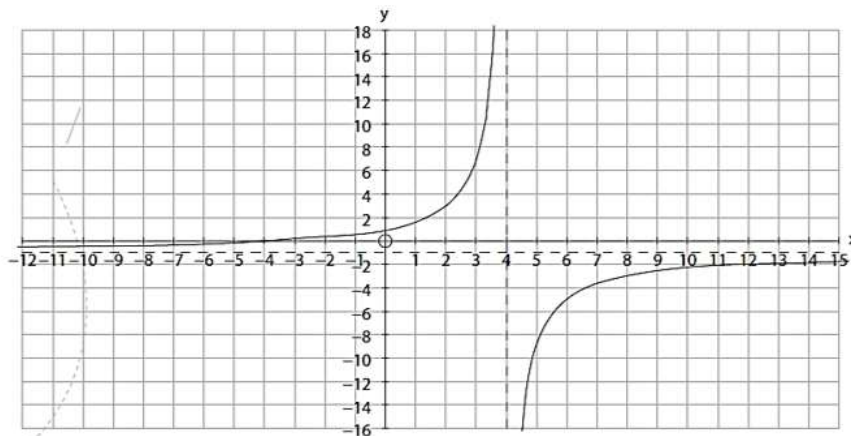
y-afsnit: stel $x = 0$: $y = -1 - \frac{8}{0-4} = -1 + 2 = 1$

x-afsnit: stel $y = 0$:

$$0 = -1 - \frac{8}{x-4} \quad \therefore (x-4) = -8 \quad \therefore x = -4$$

Standaardvorm
van hiperbool

Die hiperbool sal soos volg lyk:



Grafiek nie volgens skaal geteken nie

Gebied: $x \in \mathbb{R}, x \neq 4$

Terrein: $y \in \mathbb{R}, y \neq -1$

Die funksie neem toe / stygend

Vergelyking van die simmetrie-as met negatiewe gradiënt:

$$y = -x + c$$

$$-1 = -(4) + c$$

$$c = 3$$

$$\therefore y = -x + 3$$

Voorbeeld 3

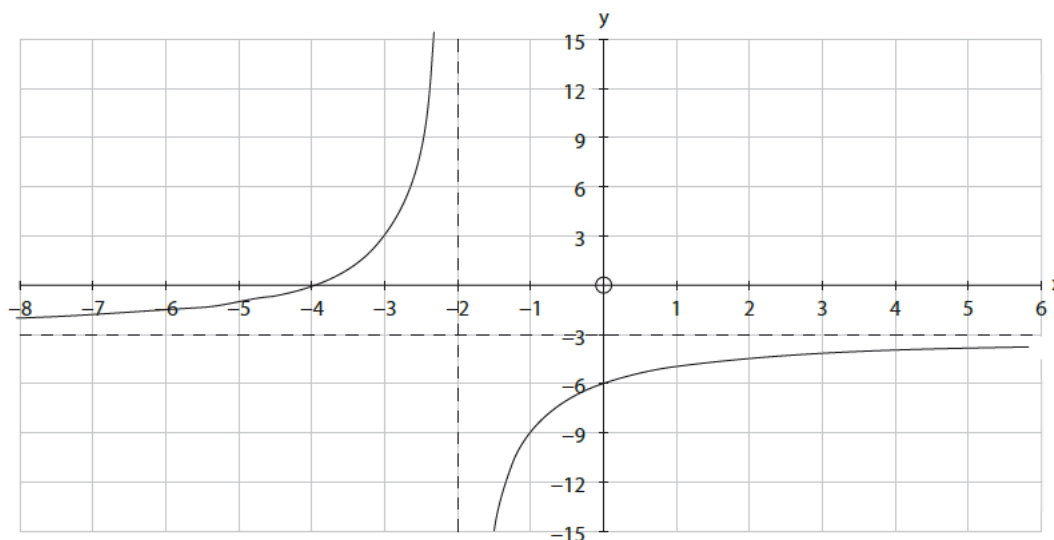
Bepaling van die vergelyking van 'n hiperbool wanneer die grafiek gegee is.

Stap 1: Die posisie van die asimptote gee ons die waardes van p en q in

$$y = \frac{a}{x+p} + q$$

Stap 2: Om die waarde van a te bepaal, vervang ons enige punt op die grafiek in die vergelyking.

Voorbeeld: Die grafiek van $y = \frac{a}{x+p} + q$ is hieronder geskets. Bepaal die waardes van a , p en q .



Vanaf die grafiek sien ons dat, $p = 2$ en $q = -3$

Die vergelyking word dan: $y = \frac{a}{x+2} - 3$

Vervanging van $(0 ; -6)$ of enige ander punt op die grafiek in die vergelyking gee:

$$-6 = \frac{a}{0+2} - 3 \quad \therefore -12 = a - 6 \quad \therefore a = -6$$

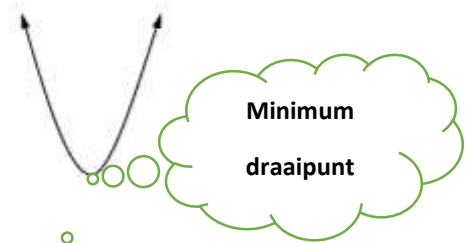
$$\therefore y = -\frac{6}{x+2} - 3$$

NB – die funksie neem toe / stygend

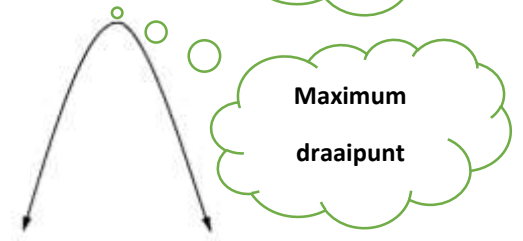
AFDELING 3: KWADRATIESE FUNKSIE (PARABOOL)

Die grafiek van $y = a(x + p)^2 + q$

As a positief is, d.w.s $a > 0$, dan is die vorm van die grafiek ☺



As a negatief is, d.w.s $a < 0$, dan is die vorm van die grafiek ☹



Die grafiek het 'n simmetrie-as by $x = -p$

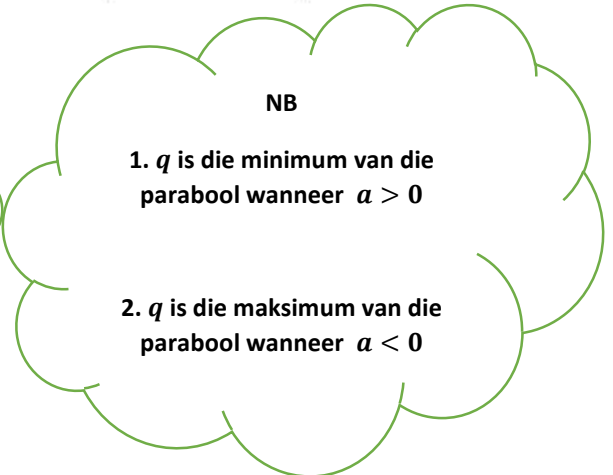
Die grafiek het 'n draaipunt by $(-p; q)$

Gebied: $x \in R$

Terrein: $y \geq q$ ☺ (**WANNEER, $a > 0$**)

of

$y \leq q$ ☹ (**WANNEER, $a < 0$**)



NB – Die parabool verander van stygend na dalend of dalend na stygend by die draaipunt.

wanneer, $a > 0$

1. Die grafiek neem toe (stygend) vir: $x > -p$
2. Die grafiek neem af (dalend) vir: $x < -p$

wanneer, $a < 0$

1. Die grafiek neem toe (stygend) vir: $x < -p$
2. Die grafiek neem af (dalend) vir: $x > -p$

Die kwadratiese funksie kan ook in die volgende vorm voorgestel word:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Standardvorm van
parabool

Die grafiek van $y = ax^2 + bx + c$

As a positief is, d.w.s $a > 0$, dan is die vorm van die grafiek ☺

Minimum
draaipunt

As a negatief is, d.w.s $a < 0$, dan is die vorm van die grafiek ☹

Maximum
draaipunt

Die grafiek het simmetrie-as by: $x = -\frac{b}{2a}$

Die grafiek het draaipunt by $(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a}))$

Gebied: $x \in R$

Terrein: $y \geq f(-\frac{b}{2a})$ ☺ (**WANNEER, $a > 0$**)

of

$y \leq f(-\frac{b}{2a})$ ☹ (**WANNEER, $a < 0$**)

NB

1. $f(-\frac{b}{2a})$ is die minimum van
die parabool wanneer, $a > 0$

2. $f(-\frac{b}{2a})$ is die maksimum van
die parabool wanneer, $a < 0$

Voorbeeld 1

Skets die grafiek van $f(x) = x^2 - 5x - 6$, toon die draaipunt en afsnitte met die asse duidelik aan. Gee ook die interval waar die funksie stygend is en waar die funksie dalend is. Bepaal, laastens, die gebied en terrein van $f(x) = x^2 - 5x - 6$.

Oplossing

Skets die grafiek van $f(x) = x^2 - 5x - 6$

1. y-afsnit

$$f(0) = -6$$

Daarom is die koördinate van die y-afsnit $(0; -6)$

2. x-afsnit

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$$x = 6 \quad \text{of} \quad x = -1$$

$$(6; 0) \quad \text{en} \quad (-1; 0)$$

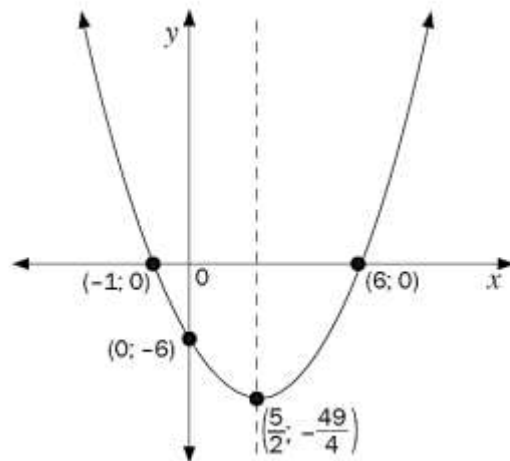
3. Simmetrie-as

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \\ &= \frac{-(-5)}{2(1)} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

4. Draaipunt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{2}\right) &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) - 6 \\ &= -12\frac{1}{4} \\ \therefore TP &\left(\frac{5}{2}; -12\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

5. Sketsgrafiek



6. Die interval waar die grafiek stygend is / toeneem

$$x > \frac{5}{2}$$

Die interval waar die grafiek dalend is / afneem

$$x < \frac{5}{2}$$

7. Gebied : $x \in R$

$$\text{Terrein : } y \geq -\frac{49}{4}$$

Bepaal die vergelyking van 'n kwadratiese funksie

Gegee die x -afsnit en een punt	Gegee die draaipunt en een punt
<ul style="list-style-type: none"> • Gebruik die formule: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$. • Vervang die waardes van die x-afsnitte. • Vervang die gegewe punte wat nie die x-afsnit is nie. • Los op vir a. • Skryf die vergelyking in die vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$. 	<ul style="list-style-type: none"> • Gebruik die formule: $y = a(x + p)^2 + q$. • Vervang die koördinate van die draaipunt $(p; q)$. • Vervang die gegewe punt • Los op vir a. • Skryf die vergelyking in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$ of $f(x) = ax^2 + bx + c$ afhangende van die instruksie in die vraag.
Gegee die koördinate van drie punte op die parabool	
<ul style="list-style-type: none"> • Gebruik die formule: $y = ax^2 + bx + c$. • Een van die gegewe punte is die y-afsnit, daarom is c gegee, vervang dus sy waarde. • Vervang die koördinate van die ander twee punte in $y = ax^2 + bx + c$. • Los die twee vergelykings gelyktydig op vir a en b. 	

BRON: Mind The Gap Wiskunde Studiegids

Voorbeeld 2

Bepaal die vergelyking van die parabool in die vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\therefore y = a(x - (-3))(x - 4)$$

$$\therefore y = a(x + 3)(x - 4)$$

Vervang $(2; -20)$ om die waarde van a te vind

$$-20 = a(2 + 3)(2 - 4)$$

$$\therefore -20 = a(5)(-2)$$

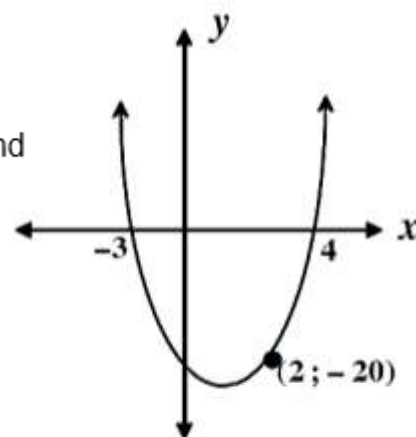
$$\therefore -20 = -10a$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore y = 2(x + 3)(x - 4)$$

$$\therefore y = 2(x^2 - x - 12)$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 - 2x - 24$$



Voorbeeld 3

Bepaal die vergelyking van g in die vorm $y = ax^2 + bx + c$

Die simmetrie-as word gegee deur $x = -1$

$$\therefore x + 1 = 0$$

Vanaf die werk op parabole, is dit duidelik dat die uitdrukking $x + 1$ is in die hakies van die vergelyking vir 'n parabool.

Verder is die waarde van $q = 8$ (die y -waarde van die draaipunt)

$$\therefore y = a(x + 1)^2 + 8$$

Vervang nou die punt $(2; -10)$ wat op die grafiek van die parabool lê in.

$$-10 = a(2 + 1)^2 + 8$$

$$\therefore -18 = a(3)^2$$

$$\therefore -18 = 9a$$

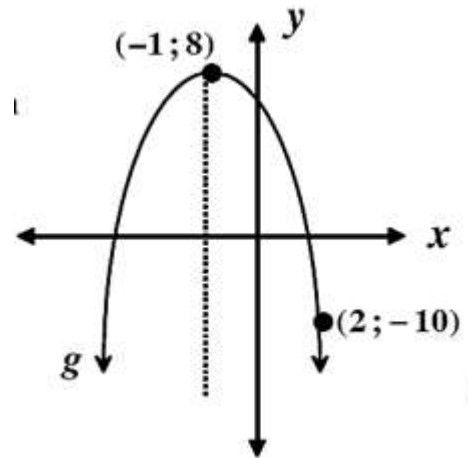
$$\therefore a = -2$$

$$\therefore y = -2(x + 1)^2 + 8$$

$$\therefore y = -2(x^2 + 2x + 1) + 8$$

$$\therefore y = -2x^2 - 4x - 2 + 8$$

$$\therefore y = -2x^2 - 4x + 6$$



AFDELING 4: EKSPONENSIALE FUNKSIE

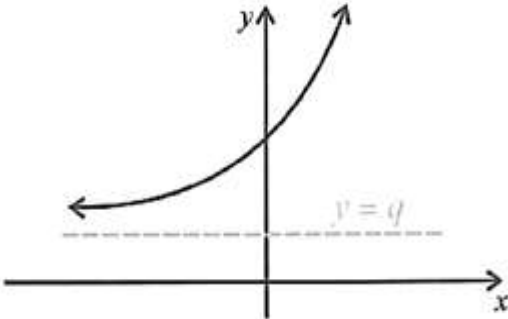
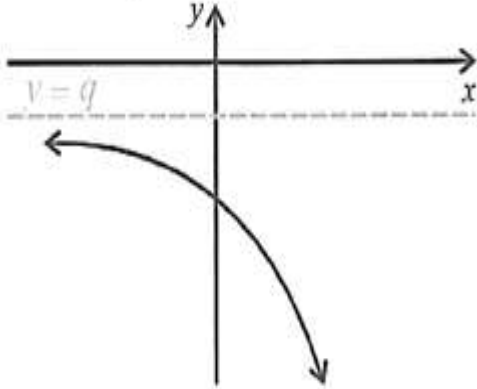
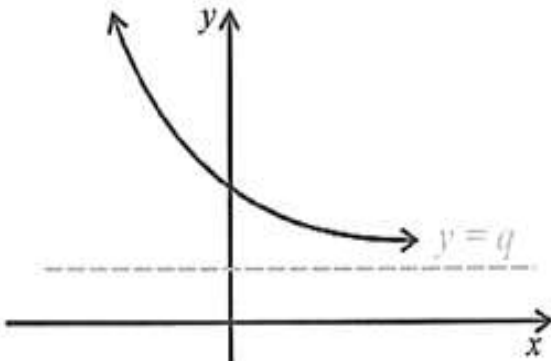
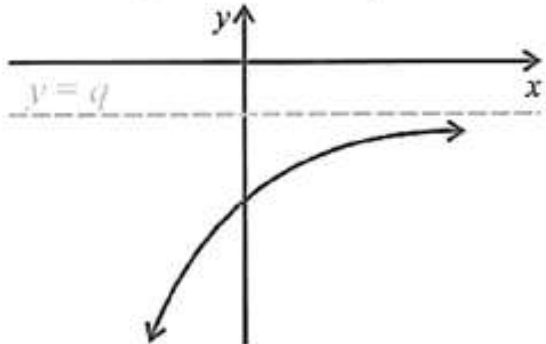
Standaardvorm
van eksponensiale
funksie

Die grafiek van $y = a \cdot b^{x+p} + q$; waar $b > 0$ en $b \neq 1$

Die vergelyking van die asimptoot is: $y = q$ (*horisontale asimptoot*)

Gebied: $x \in \mathbb{R}$

Terrein: $y > q$ [as $a > 0$] of $y < q$ [as $a < 0$]

$a > 0$ en $b > 1$	$a < 0$ en $b > 1$
Die grafiek lê bo die horisontale asimptoot en is 'n stygende funksie.	Die grafiek lê onder die horisontale asimptoot en is 'n dalende funksie.
	
$a > 0$ en $0 < b < 1$	$a < 0$ en $0 < b < 1$
Die grafiek lê bo die horisontale asimptoot en is 'n dalende funksie.	Die grafiek lê onder die horisontale asimptoot en is 'n stygende funksie.
	

(BRON: MATHS MADE EASY – A comprehensive guide to Grade 12 Mathematics)

Voorbeeld 1

Skets die grafiek van $y = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 4$

Horisontale asimptoot: $y = -4$

x-afsnit: stel $y = 0$

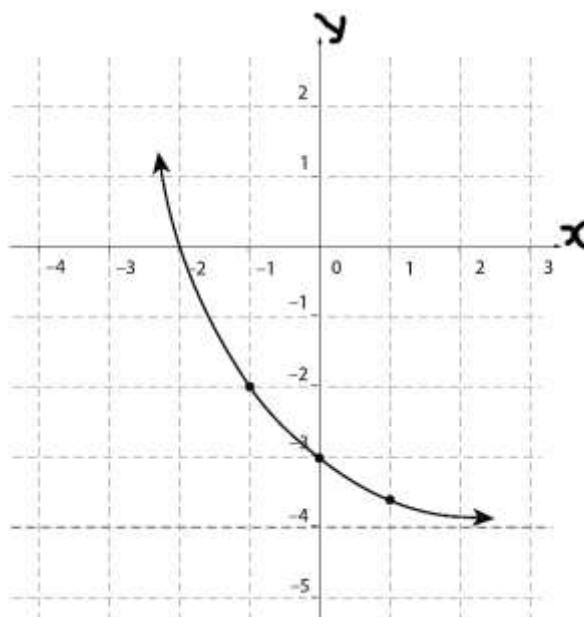
$$0 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 4 \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\therefore x+1 = -1 \quad \therefore x = -2$$

y-afsnit: stel $x = 0$

$$y = -3$$



NB: Die funksie is dalend / neem af

Voorbeeld 2

Kom on kyk na 'n tweede voorbeeld, $y = 3 \cdot (3)^{x-2} + 1$

Horisontale asimptoot: $y = 1$

$$0 = 3 \cdot (3)^{x-2} + 1$$

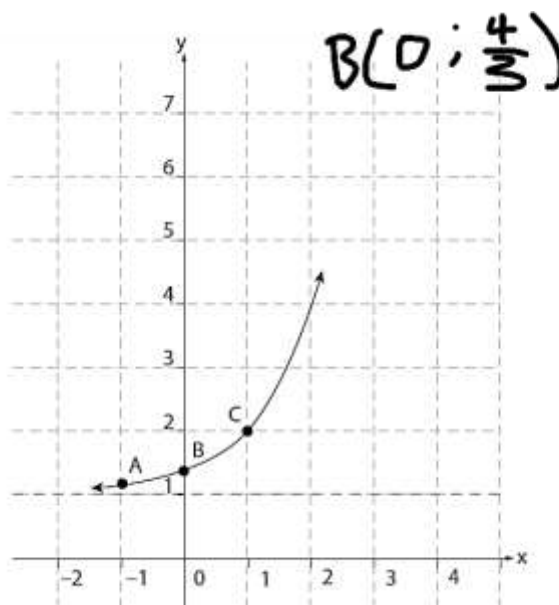
x-afsnit: $\therefore 3(3)^{x-2} = -1$

\therefore Geen x-afsnit(te)

y-afsnit: stel $x = 0$

$$y = \frac{4}{3}$$

NB – Die funksie is stygend / neem toe



Bepaling van die vergelyking van 'n eksponentiale funksie

Voorbeeld 3

Bepaal die vergelyking van : $g(x) = b^{x+1} + q$

Horisontale asimptoot: $y = -2$

Daarom is die waarde van $q = -2$

$$\therefore y = b^{x+1} - 2$$

Vervang nou die punt $(-3 ; 2)$ in die vergelyking om b te kry.

$$2 = b^{-3+1} - 2$$

$$\therefore 4 = b^{-2}$$

$$\therefore 4 = \frac{1}{b^2}$$

$$\therefore 4b^2 = 1$$

$$\therefore 4b^2 - 1 = 0$$

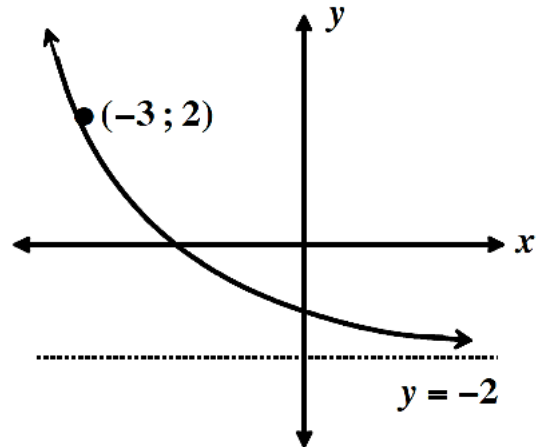
$$\therefore (2b+1)(2b-1) = 0$$

$$\therefore b = -\frac{1}{2} \quad \text{or} \quad b = \frac{1}{2}$$

$$\text{But } b \neq -\frac{1}{2}$$

$$\therefore b = \frac{1}{2}$$

Daarom is die vergelyking: $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2$



Neem kennis:

Omdat $b > 0$, kon jy die vergelyking

$4b^2 = 1$ soos volg opgelos het.

$$4b^2 = 1$$

$$\therefore b^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore b = \frac{1}{2}$$

TRANSFORMASIE VAN FUNKSIES

REFLEKSIES EN TRANSLASIES

Gegee: $f(x) = \frac{2}{x+1} - 3$	Gegee: $f(x) = 2 \cdot 3^{x-2} + 4$	Gegee: $f(x) = x^2 + 5x + 6$
<p>a. Die grafiek van $g(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$, 2 eenhede op en 3 eenhede na links te skuif. Bepaal die vergelyking van $g(x)$.</p> <p>Oplossing $g(x) = f(x + 3) + 2$</p> $= \frac{2}{x+3+1} - 3 + 2$ $= \frac{2}{x+4} - 1$ <p>b. Die grafiek van $h(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die $x - as$ te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $h(x)$.</p> <p>Oplossing $h(x) = -f(x)$</p> $= -\left(\frac{2}{x+1} - 3\right)$ $= -\frac{2}{x+1} + 3$ <p>c. Die grafiek van $m(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die $y - as$ te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $m(x)$.</p> <p>Oplossing $m(x) = f(-x)$</p> $= \frac{2}{-x+1} - 3$ $= \frac{2}{-(x-1)} - 3$ $= -\frac{2}{x-1} - 3$	<p>a. Die grafiek van $g(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$, 2 eenhede op en 3 eenhede na links te skuif. Bepaal die vergelyking van $g(x)$.</p> <p>Oplossing $g(x) = f(x + 3) + 2$</p> $= 2 \cdot 3^{x+3-2} + 4 + 2$ $= 2 \cdot 3^{x+1} + 6$ <p>b. Die grafiek van $h(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die $x - as$ te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $h(x)$.</p> <p>Oplossing $h(x) = -f(x)$</p> $= -(2 \cdot 3^{x-2} + 4)$ $= -2 \cdot 3^{x-2} - 4$ <p>c. Die grafiek van $m(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die $y - as$ te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $m(x)$.</p> <p>Oplossing $m(x) = f(-x)$</p> $= 2 \cdot 3^{-x-2} + 4$ $= 2 \cdot 3^{-(x+2)} + 4$ $= 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} + 4$	<p>a. Die grafiek van $g(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$, 2 eenhede af en 3 eenhede na regs te skuif. Bepaal die vergelyking van $g(x)$.</p> <p>Oplossing $g(x) = f(x - 3) - 2$</p> $= (x - 3)^2 + 5(x - 3) + 6 - 2$ $= x^2 - 6x + 9 + 5x - 15 + 4$ $= x^2 - x - 2$ <p>b. Die grafiek van $h(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die $x - as$ te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $h(x)$.</p> <p>Oplossing $h(x) = -f(x)$</p> $= -(x^2 + 5x + 6)$ $= -x^2 - 5x - 6$ <p>c. Die grafiek van $m(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die $y - as$ te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $m(x)$.</p> <p>Oplossing $m(x) = f(-x)$</p> $= (-x)^2 + 5(-x) + 6$ $= x^2 - 5x + 6$

AFDELING 5: INVERSE FUNKSIES

Die konsep van 'n funksie.

'n Funksie, f word gedefinieer as 'n verwantskap tussen waardes, waar elke invoer waarde op een uitvoer waarde afbeeld.

In ander woorde, vir 'n vergelyking om 'n funksie genoem te word, kan daar slegs een y -waarde vir 'n sekere x -waarde wees.

Daar is twee tipes funksies:

1. Een-tot-Een Funksies
2. Baie-tot-Een Funksies

EEN-TOT-EEN FUNKSIES

'n Een-to-Een funksie is 'n funksie waar daar 'n enkele y -waarde vir 'n sekere x -waarde is.

BAIE-TOT-EEN FUNKSIES

'n Funksie kan nie meer as een y -waarde vir elke x -waarde het nie. 'n Funksie kan egter meer as een x -waarde vir 'n sekere y -waarde het. Dit staan bekend as baie-tot-een funksies.

VERTIKALE LYN TOETS

Om te toets of 'n grafiek 'n funksie is, gebruik die vertikale lyn toets. As 'n vertikale lyn ('n lyn ewewydig aan die y -as) die grafiek by meer as een plek sny, is die grafiek nie 'n funksie nie. Jy hoef nie die lyn te teken/trek nie, hou net 'n liniaal ewewydig aan die y -as, en beweeg dit van links na regs. As die liniaal die grafiek meer as eenkeer raak vir 'n enkele x -waarde, enige plek op die grafiek, dan is die grafiek nie 'n funksie nie. In die geval waar die grafiek nie 'n funksie is nie, word dit 'n relasie genoem.

HORISONTALE LYN TOETS

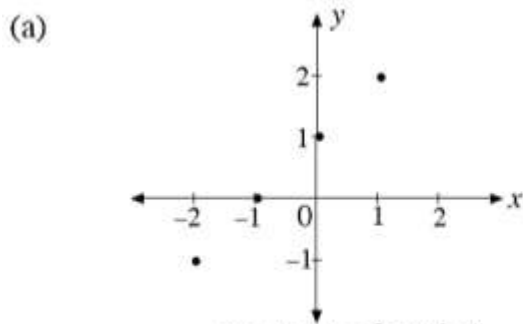
As 'n grafiek die vertikale lyn toets slaag is dit 'n funksie. Die horisontale lyn toets kan gebruik word om te bepaal watter tipe funksie dit voorstel.

As 'n horisontale lyn ('n lyn ewewydig aan die x -as) geteken/getrek word en op en af geskuif word en die grafiek meer as een plek raak, is dit 'n baie-tot-een funksie. (baie x -waardes tot 'n enkele y -waarde. Anders is dit 'n een-tot-een funksie.

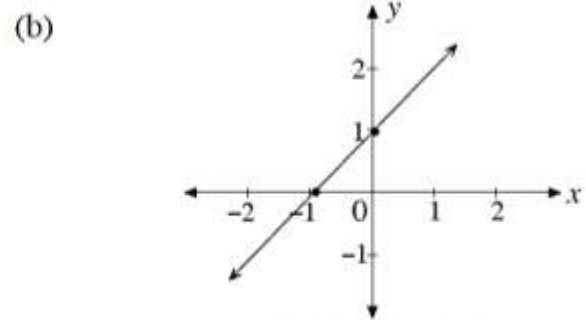
(BRON: MATHS MADE EASY – A comprehensive guide to Grade 12 Mathematics)

Voorbeelde

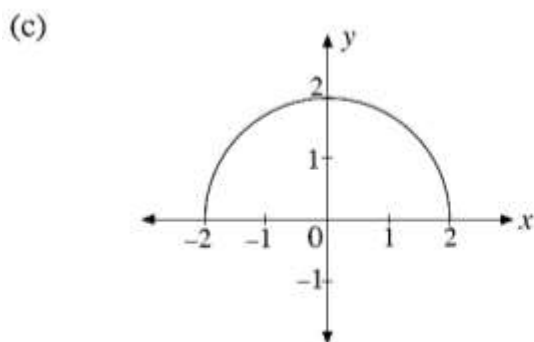
Bepaal of die volgende relasies funksies is of nie. Indien die grafiek 'n funksie is, bepaal of die funksie een-tot-een of baie-tot-een is.



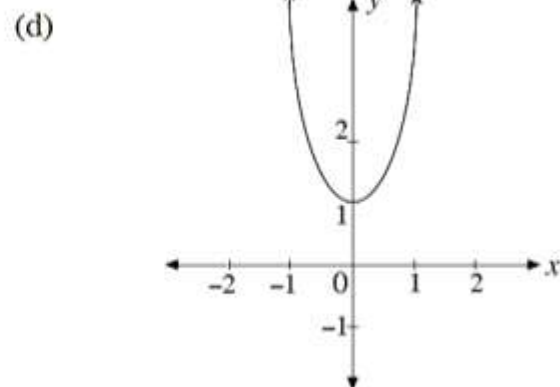
een-tot-een funksie



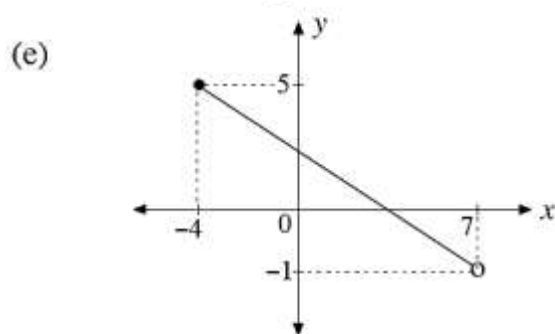
een-tot-een funksie



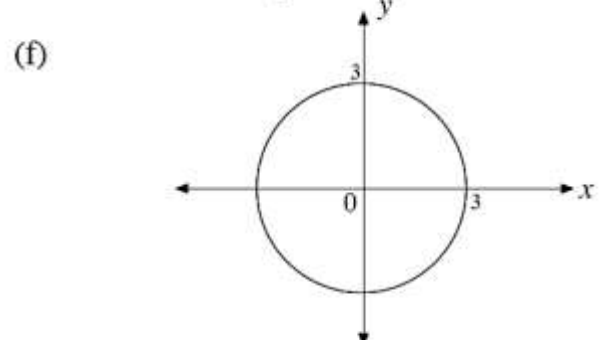
baie-tot-een funksie



baie-tot-een funksie



een-tot-een funksie



nie 'n funksie nie

(BRON: Mind Action series Mathematics12 Textbook and Workbook)

Inverse Funksie

- Die inverse van 'n funksie neem die y-waardes (terrein) van die funksie na die ooreenkomstige x-waardes (gebied) van die funksie en omgekeerd. Daarom word die x- en y-waardes omgeruil.
- Die funksie is gereflekteer om die lyn $y = x$ om die inverse te vorm.
- Die notasie vir die inverse van 'n funksie is f^{-1} .
- NB – Die gebied van die inverse is die terrein van die funksie en die terrein van die inverse is die gebied van die funksie.
- Wanneer die funksie toeneem/styg, dan is die inverse ook toenemend/stygend. Wanneer die funksie afneem/daal, dan is die inverse ook afnemend/dalend.

Inverse funksie : Lineêr ($y = ax + q$)

Voorbeeld 1

Gegee: $f(x) = 2x + 6$

1. Bepaal $f^{-1}(x)$

2. Skets die grafieke van $f(x)$ en $f^{-1}(x)$ en $y = x$ op dieselfde assestelsel.

Oplossing

1. Ten einde die inverse van 'n funksie te kry is daar twee stappe.

Stap 1: Ruil die x en y om

$$y = 2x + 6$$

$$\text{word } x = 2y + 6$$

Ons herskryf dan die vergelyking om y die onderwerp van die formule te maak.

Stap 2: Maak y die onderwerp van die formule.

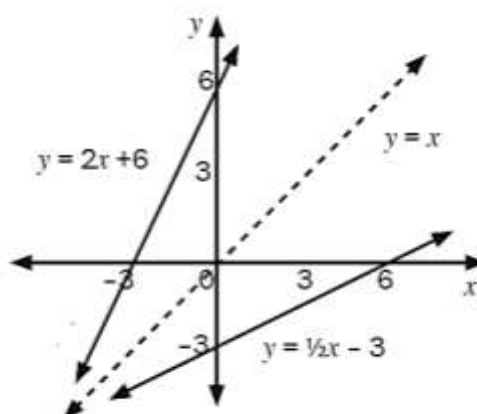
$$x = 2y + 6$$

$$x - 6 = 2y$$

$$\text{So } y = \frac{1}{2}x - 3$$

Ons kan dus sê dat die inverse funksie is:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$$



Inverse funksie : Kwadratiese ($y = ax^2$)

Voorbeeld 2

(a) Skets $f(x) = 2x^2$

(b) Bepaal die inverse van $f(x)$

(c) Skets $f^{-1}(x)$ en $y = x$ op dieselfde assestelsel as $f(x)$.

OPLOSSING

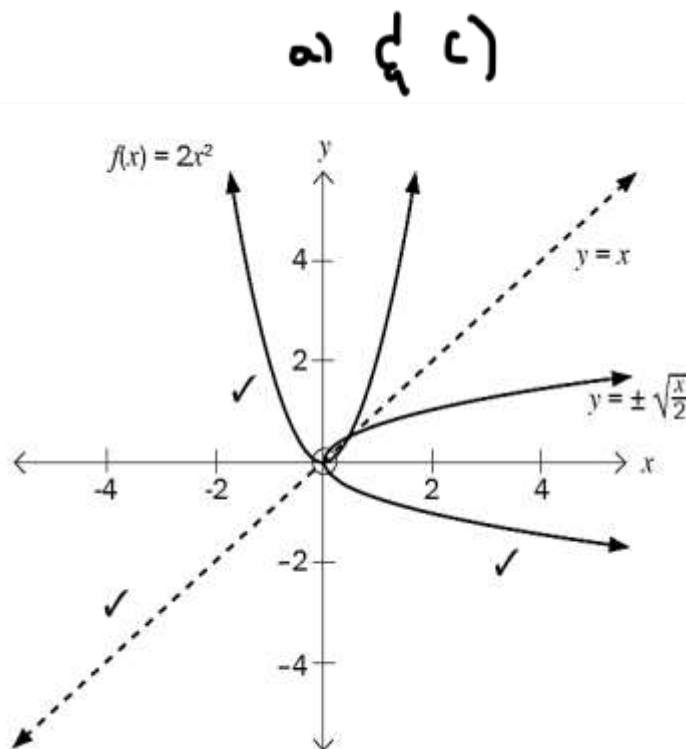
Solution

1. b) $y = 2x^2$

$$x = 2y^2 \quad \checkmark$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{x}{2}} \quad \checkmark$$

- Hierdie is nie 'n funksie nie.
- Ondersoek dit met die vertikale lyn toets. Daar is twee y-waardes vir een x-waarde
- Nie alle inverses van funksies is ook funksies nie. Sommige inverses is relasies.
- Indien 'n inverse nie 'n funksie is nie, dan kan ons die gebied van die funksie beperk, sodat die inverse ook 'n funksie is.



- Om die inverse 'n funksie te maak, moet ons 'n stel x-waardes in die funksie kies en slegs daarmee werk. Ons noem dit "**beperking van die gebied**".
 - 'n een-tot-een funksie se inverse is ook 'n funksie.
 - Byvoorbeeld: $y = 3x + 4$ is 'n een-tot-een funksie. Vir elke x-waarde is daar slegs een y-waarde.
 - 'n Baie-tot-een funksie se inverse is nie 'n funksie nie. Ons kan egter die gebied van die funksie beperk sodat die inverse ook 'n funksie is.
- Byvoorbeeld: $y = 2x^2$ is 'n baie-tot-een funksie. Vir twee of baie x-waardes is daar slegs een y-waarde. (as $x = 2$ dan is $y = 8$ / as $x = -2$ dan is $y = 8$)

Daarom is die inverse : $y = \pm \sqrt{\frac{x}{2}}$ nie 'n funksie nie.

- Om te kyk/uit te vind of 'n grafiek 'n funksie is, teken 'n vertikale lyn. Indien die vertikale lyn die grafiek slegs by een plek sny, dan is die grafiek 'n funksie. Indien enige vertikale lyn die grafiek by meer as een plek sny, dan is die grafiek nie 'n funksie nie.

- Om te kyk/uit te vind of dit een-tot-een of baie-tot-een funksie is, teken 'n horisontale lyn. As enige horisontale lyn die grafiek slegs eenkeer sny, is dit 'n een-tot-een funksie. As enige horisontale lyn die grafiek by meer as een plek sny, dan is die grafiek 'n baie-tot-een funksie.

Voorbeeld 3

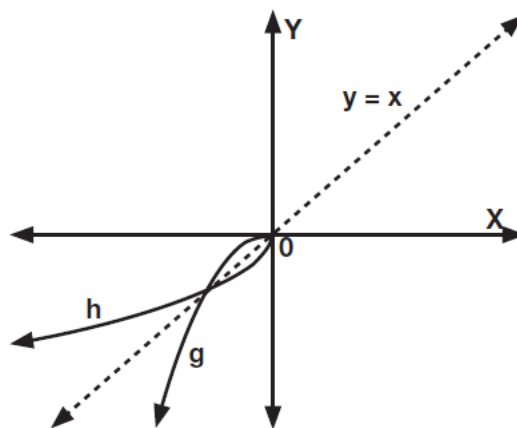
Gegee: $g(x) = -x^2$; waar $x \leq 0$

- (a) Skryf die vergelyking van die inverse van g , g^{-1} in die vorm $h(x) = \dots$
 (b) Skets die grafiek van g , h en $y = x$ op dieselfde assestelsel.

OPLOSSING

(a) $y = -x^2$
 $x = -y^2$
 $-x = y^2$
 $\pm\sqrt{-x} = y$
 $-\sqrt{-x} = y$; waar $x \leq 0$
 $\therefore h(x) = -\sqrt{-x}$

(b)



Inverse funksie : Eksponensiaal:

$$y = b^x; (b > 0, b \neq 1)$$

Voorbeeld 4

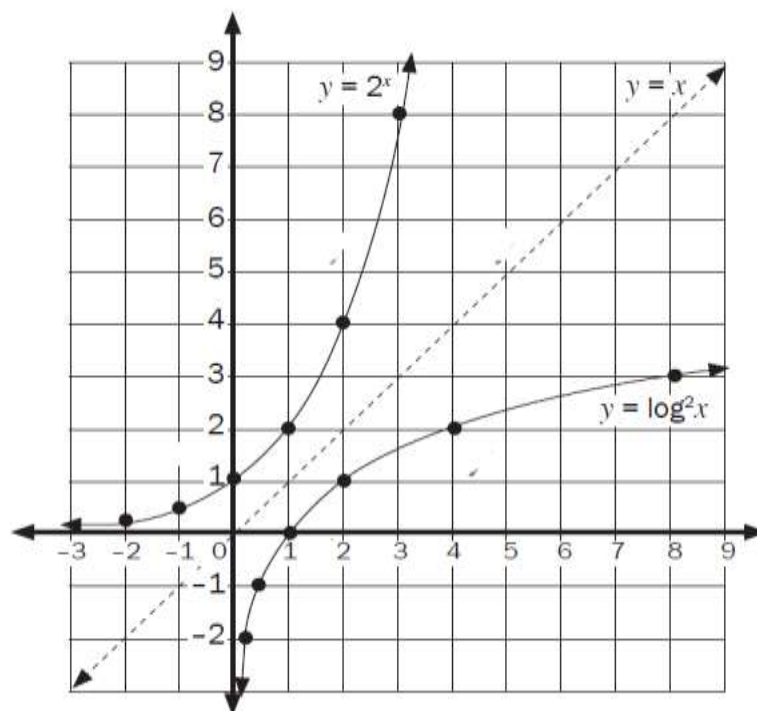
Gegee: $f(x) = 2^x$

- (a) Bepaal f^{-1} in die vorm $y = \dots$
- (b) Skets die grafieke van $f(x)$, $f^{-1}(x)$ en $y = x$ op dieselfde assestelsel.
- (c) Skryf die gebied en terrein van $f(x)$ en $f^{-1}(x)$ neer.

Oplossing

- (a) Die inverse van die eksponentiale funksie $y = 2^x$ is $x = 2^y$ wat dan geskryf kan word as $y = \log_2 x$

b)



- c) Die gebied en terrein van $f(x)$

Gebied: $x \in \mathbb{R}$

Terrein: $y > 0$

Die gebied en terrein van $f^{-1}(x)$

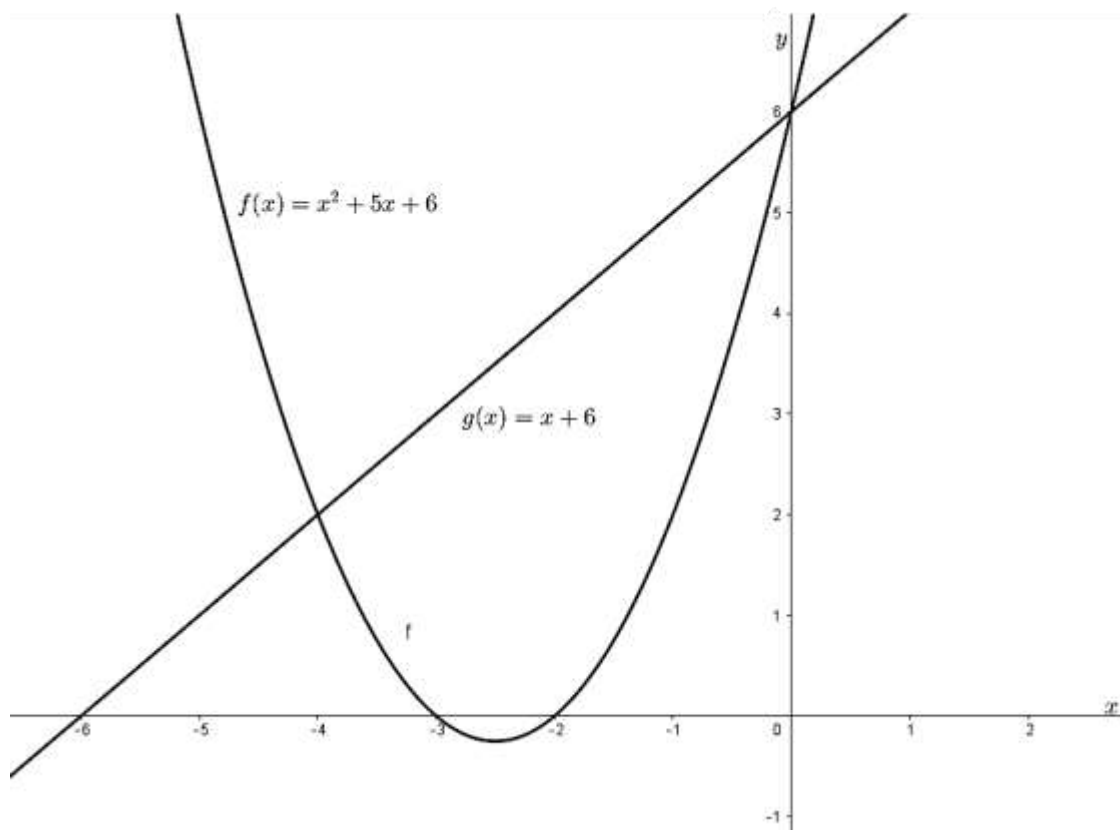
Gebied: $x > 0$

Terrein: $y \in \mathbb{R}$

AFDELING 6: KOMBINASIES

Neem kennis van die volgende wanneer met kombinasies van funksies gewerk word:

Beskou die grafieke van f en g hieronder

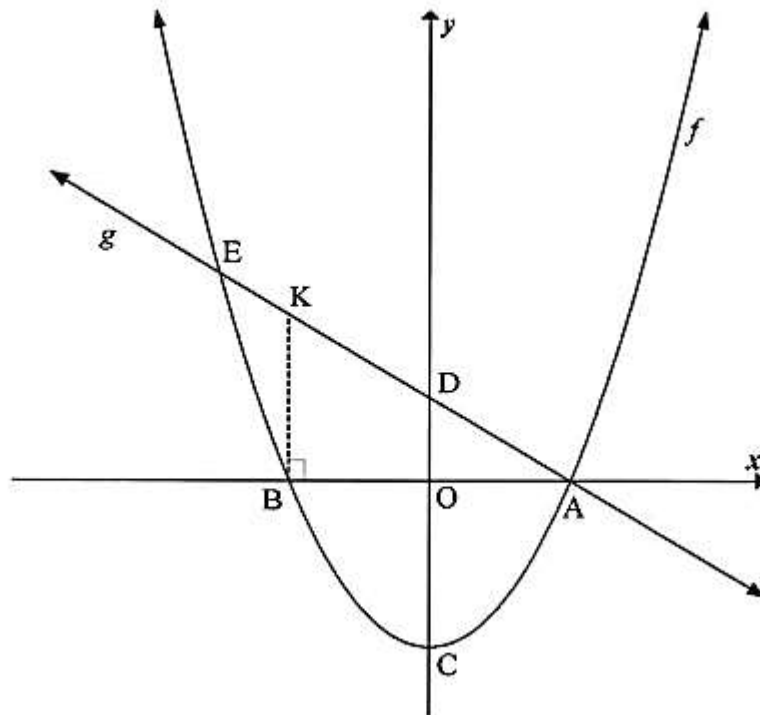


Vir $f(x) > 0$ of $f(x) < 0$	Vir $f(x) > g(x)$ of $f(x) < g(x)$	Vir $f(x) \cdot g(x) > 0$ of $f(x) \cdot g(x) < 0$
<p>Fokus op die x - as. $f(x) > 0$ beteken waar die grafiek van $f(x)$ positief is, wat bokant die x - as sal wees.</p> <p>En $f(x) < 0$ beteken waar die grafiek van $f(x)$ negatief is, wat onder die x - as sal wees.</p>	<p>$f(x) > g(x)$ beteken waar die grafiek van $f(x)$ bo die grafiek van $g(x)$ is.</p> <p>En $f(x) < g(x)$ beteken waar die grafiek van $f(x)$ onder die grafiek van $g(x)$ is.</p>	<p>$f(x) \cdot g(x) > 0$ beteken waar die produk van $f(x)$ en $g(x)$ positief is.</p> <p>En $f(x) \cdot g(x) < 0$ beteken waar die produk van $f(x)$ en $g(x)$ negatief is.</p>

Voorbeeld 1

VRAAG 5

Die grafieke van $f(x) = x^2 - 4$ en $g(x) = -x + 2$ is hieronder geskets. A en B is die x -afsnitte van f . C en D is die y -afsnitte van f en g onderskeidelik. K is 'n punt op g sodat $BK \parallel x$ -as. f en g sny by A en E.



- 5.1 Skryf die koördinate van C neer.
- 5.2 Skryf die koördinate van D neer.
- 5.3 Bepaal die lengte van CD.
- 5.4 Bereken die koördinate van B.
- 5.5 Bepaal die koördinate van E, 'n snypunt van f en g .
- 5.6 Vir watter waarde(s) van x is:
 - 5.6.1 $f(x) < g(x)$
 - 5.6.2 $f(x) \cdot g(x) \geq 0$
- 5.7 Bereken die lengte van AK.

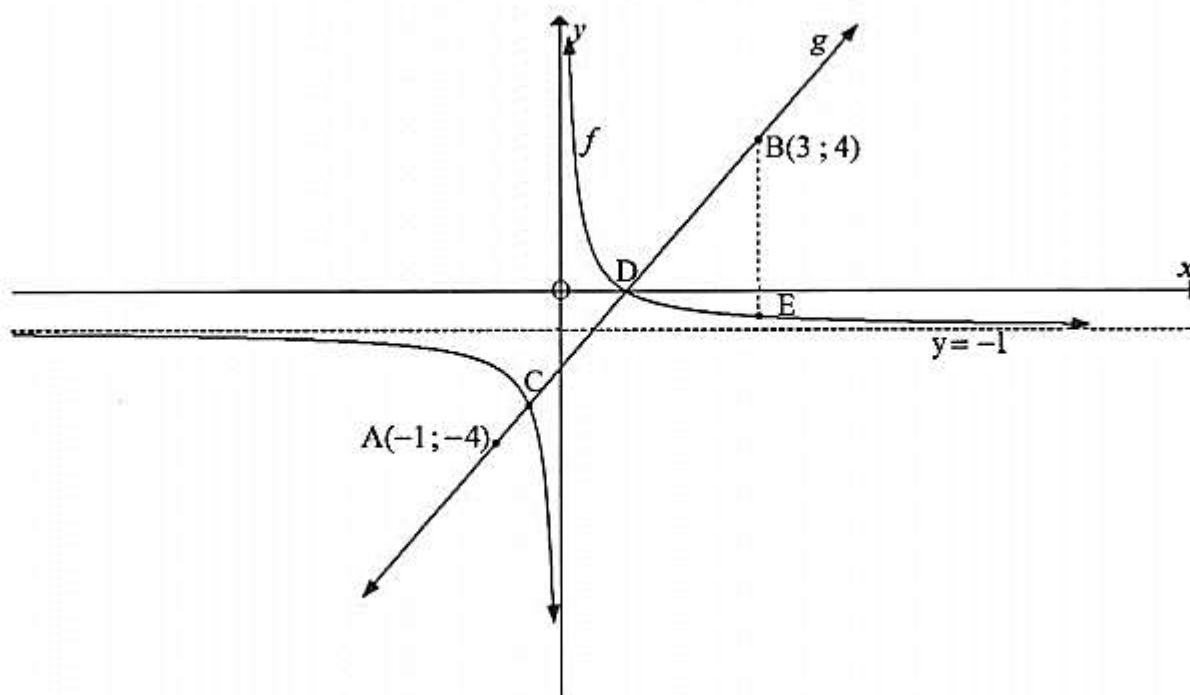
OPLOSSINGS
VRAAG 5

5.1	$C(0 ; -4)$
5.2	$D(0 ; 2)$
5.3	$CD = 2 - (-4)$ $CD = 6 \text{ units/eenhede}$
5.4	$x^2 - 4 = 0$ $(x - 2)(x + 2) = 0$ $x = 2 \quad x = -2$ $B(-2 ; 0)$
5.5	$x^2 - 4 = -x + 2$ $x^2 + x - 6 = 0$ $(x - 2)(x + 3) = 0$ $x = 2 \quad x = -3$ $E(-3 ; 5)$
5.6.1	$-3 < x < 2$ OR/OF $(-3 ; 2)$
5.6.2	$(-\infty ; -2] \cup \{2\}$
5.7	$K(-2 ; 4)$ $BK = 4 \text{ units/eenhede}$ $AB = 4 \text{ units/eenhede}$ $AK = \sqrt{4^2 + 4^2} \text{ (Pythagoras)}$ $= 5,66 \text{ units/eenhede}$

Voorbeeld 2

VRAAG 5

Die skets hieronder toon f en g , die grafieke van $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ en $g(x) = ax + q$ onderskeidelik. Punte $A(-1; -4)$ en $B(3; 4)$ lê op die grafiek g . Die twee grafieke sny by punte C en D. Lyn BE is ewewydig aan die y -as geteken, met E op f .



- 5.1 Toon aan dat $a = 2$ en $q = -2$
- 5.2 Bepaal die waardes van x waarvoor $f(x) = g(x)$.
- 5.3 Vir watter waardes van x is $g(x) \geq f(x)$?
- 5.4 Bereken die lengte van BE.
- 5.5 Skryf 'n vergelyking van h neer, as $h(x) = f(x) + 3$

OPLOSSINGS

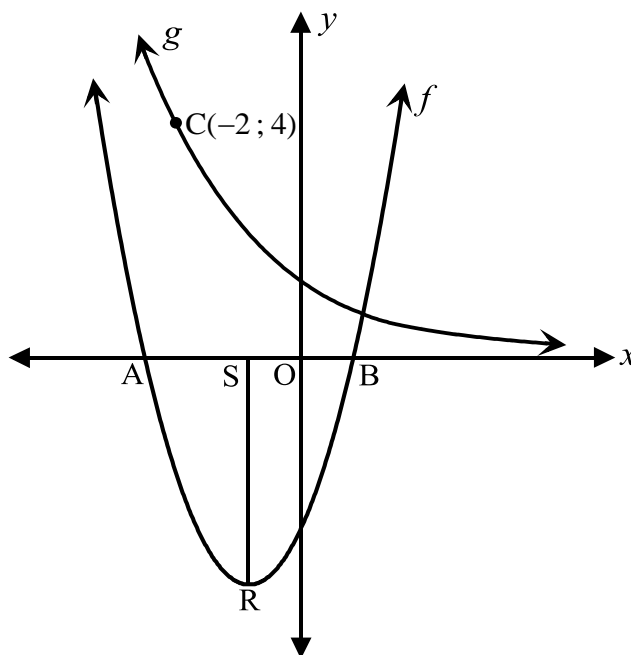
5.1	$a = \text{gradient of } g$ $= \frac{-4 - 4}{-1 - 3}$ $= 2$ $4 = 2(3) + q$ $q = -2$ $g(x) = 2x - 2$
5.2	$\frac{1}{x} - 1 = 2x - 2$ $\frac{1}{x} = 2x - 1$ $1 = 2x^2 - x$ $2x^2 - x - 1 = 0$ $(2x + 1)(x - 1) = 0$ $x = -\frac{1}{2} \quad \text{or} \quad x = 1$

5.3	$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \quad \text{or/of} \quad x \geq 1$ <p>OR/OF</p> $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup [1; \infty)$
5.4	$f(3) = \frac{1}{3} - 1$ $= -\frac{2}{3}$ <p>Length of BE = $4 - f(3)$</p> $= 4 - \left(-\frac{2}{3}\right)$ $= 4 + \frac{2}{3}$ $= 4\frac{2}{3}$ <p>OR/OF</p> $\text{BE} = 2x - 2 - \frac{1}{x} + 1$ $= \frac{2x^2 - x - 1}{x}$ $(x=3) \text{ BE} = \frac{2(3)^2 - (3) - 1}{3}$ $= \frac{18 - 4}{3}$ $= 4\frac{2}{3}$
5.5	$h(x) = f(x) + 3$ $h(x) = \frac{1}{x} + 2$

Voorbeeld 3

VRAAG 1

Die grafieke van $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ en $g(x) = a^x$ word in die skets hieronder voorgestel. A en B is die x -afsnitte van f en R is die draaipunt van f . Die punt $C(-2; 4)$ is 'n punt op die grafiek van g .



- 1.1 Toon aan dat $a = \frac{1}{2}$.
- 1.2 Bepaal die lengte van AB.
- 1.3 Bepaal die lengte van SR.
- 1.4 Skryf die vergelyking van h neer, as h die refleksie van f in die y -as is. Druk jou antwoord in die vorm $h(x) = a(x + p)^2 + q$ uit.
- 1.5 Skryf die vergelyking van g^{-1} in die vorm $y = \dots$.
- 1.6 Skets die grafiek van $y = g^{-1}(x)$ op 'n asstelsel.
- 1.7 Bepaal die waardes van x waarvoor:
 - 1.7.1 $g^{-1}(x) \geq -2$

OPLOSSINGS

1.1

$$y = a^x$$

$$\therefore 4 = a^{-2}$$

$$\therefore 4 = \frac{1}{a^2}$$

$$\therefore 4a^2 = 1$$

$$\therefore a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

1.2

$$0 = 2x^2 + 4x - 6$$

$$\therefore 0 = x^2 + 2x - 3$$

$$\therefore 0 = (x+3)(x-1)$$

$$\therefore x = -3 \text{ or } x = 1$$

$$\therefore AB = 4 \text{ eenhede}$$

1.3

$$x_R = -\frac{4}{2(2)} = -1$$

$$\therefore y_R = 2(-1)^2 + 4(-1) - 6 = -8$$

$$\therefore SR = 8 \text{ eenhede}$$

Alternatiewelik:

$$f'(x) = 4x + 4$$

$$\therefore 0 = 4x + 4$$

$$\therefore x = -1$$

1.4

$$h(x) = 2(x-1)^2 - 8$$

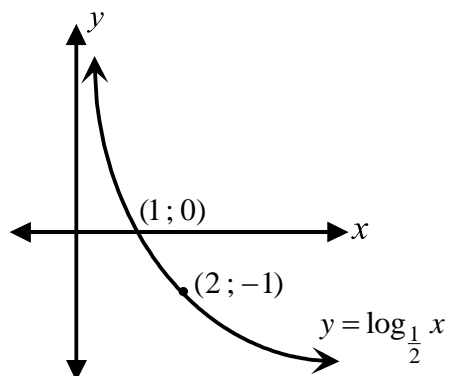
1.5

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

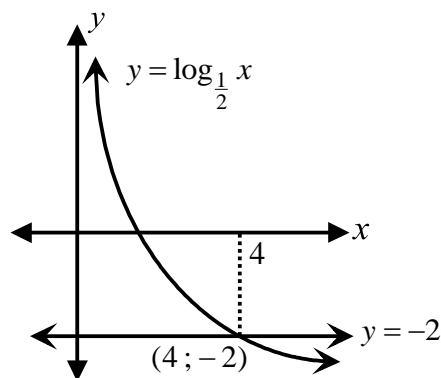
$$\therefore x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$$

$$\therefore y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

1.6



1.7.1



$$\log_{\frac{1}{2}} x = -2$$

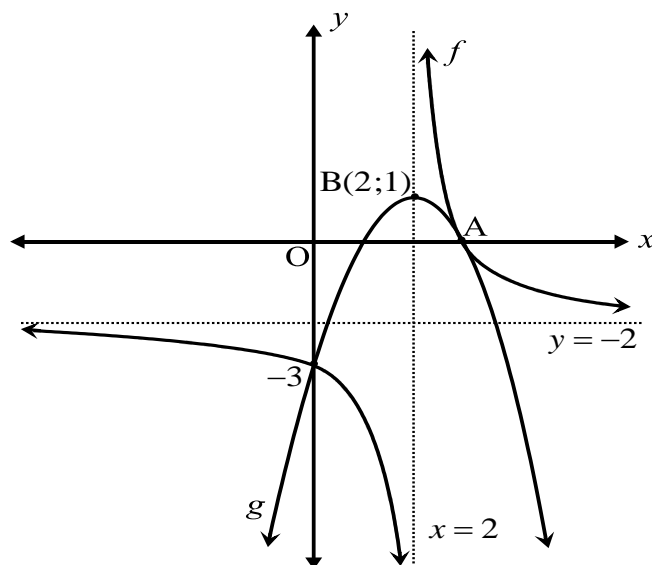
$$\therefore x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

$$\therefore g^{-1}(x) \geq -2 \text{ vir alle } 0 < x \leq 4$$

Voorbeeld 4

VRAAG 1

In die diagram hieronder, sny die grafiek van $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$ die y -as by -3 en die x -as by A. Die grafiek van $g(x) = m(x+n)^2 + c$ sny f by A, sny die y -as by -3 en het 'n draaipunt by B(2;1).



Bepaal:

- 1.1 die vergelyking van f .
- 1.2 die vergelyking van g .
- 1.3 die lengte van OA.
- 1.4 die waardes van x waarvoor $f(x) \cdot g(x) \leq 0$.

OPLOSSINGS

1.1

$$y = \frac{a}{x-2} - 2$$

Vervang: (0 ; -3) :

$$-3 = \frac{a}{0-2} - 2$$

$$\therefore -1 = \frac{a}{-2}$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{x-2} - 2$$

1.2

$$y = m(x-2)^2 + 1$$

Vervang: (0 ; -3):

$$\therefore -3 = m(0-2)^2 + 1$$

$$\therefore -4 = m(-2)^2$$

$$\therefore -4 = 4m$$

$$\therefore m = -1$$

$$\therefore g(x) = -(x-2)^2 + 1$$

1.3

$$0 = \frac{2}{x-2} - 2$$

$$\therefore 0 = 2 - 2(x-2)$$

$$\therefore 0 = 2 - 2x + 4$$

$$\therefore 2x = 6$$

$$\therefore x = 3$$

$$\therefore OA = 3 \text{ eenhede}$$

Alternatiewelik:

$$0 = -(x-2)^2 + 1$$

$$\therefore (x-2)^2 = 1$$

$$\therefore x^2 - 4x + 4 = 1$$

$$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\therefore (x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1 \text{ or } x = 3$$

$$\therefore OA = 3 \text{ eenhede}$$

1.4

$$f(x).g(x) \leq 0 \text{ vir alle}$$

$$1 \leq x < 2 \text{ of } x = 3$$

AFDELING 7: DIE GEMIDDELDE GRADIËNT TUSSEN TWEE PUNTE

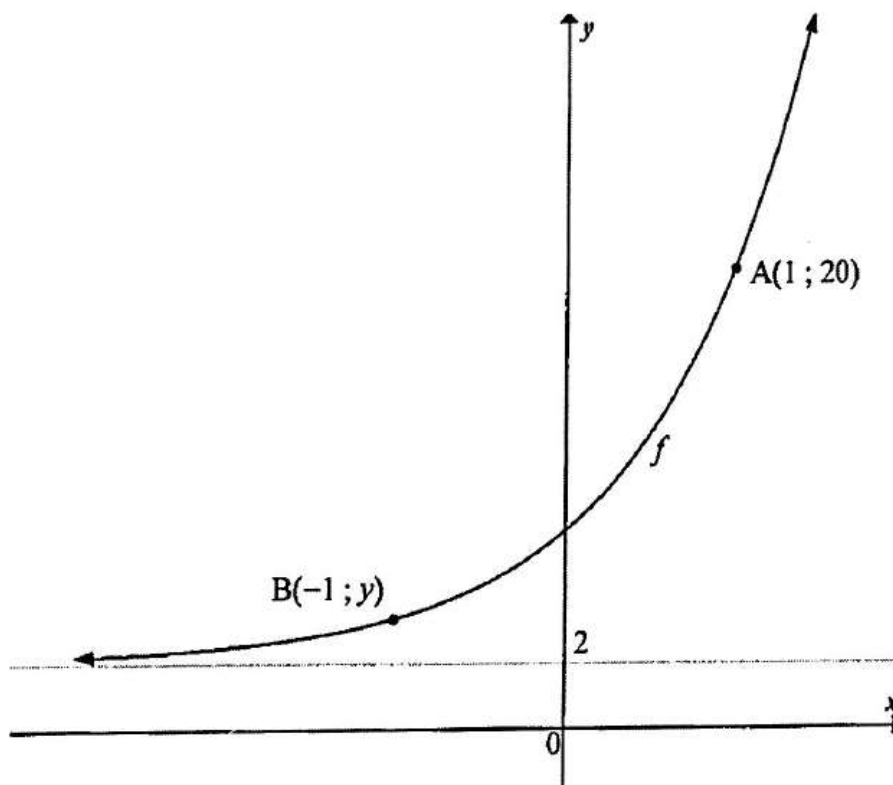
Die **gemiddelde gradiënt** van 'n funksie tussen twee punte word gedefinieer as die **gradiënt van die lyn** wat die twee punte verbind.

Voorbeeld

Die skets hieronder is die grafiek van $f(x) = 2b^{x+1} + q$

Die grafiek van f gaan deur die punte $A(1; 20)$ en $B(-1; y)$

Die lyn $y = 2$ is 'n asimptoot van f



1. Toon aan dat die vergelyking van f , $f(x) = 2(3)^{x+1} + 2$ is.
2. Bereken die y-koördinaat van die punt B.
3. Bepaal die gemiddelde gradiënt van die kurwe tussen punte A en B.

OPLOSSINGS

1.

$$q = 2$$
$$f(x) = 2 \cdot b^{x+1} + 2$$
$$20 = 2 \cdot b^{1+1} + 2$$
$$18 = 2 \cdot b^2$$
$$9 = b^2$$
$$b = 3$$
$$f(x) = 2 \cdot 3^{x+1} + 2$$

2.

$$y = 2 \cdot 3^{-1+1} + 2$$
$$y = 2 \cdot 1 + 2$$
$$y = 4$$

3.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{20 - 4}{1 - (-1)}$$
$$= 8$$

AFDELING 8: AKTIWITEITE VAN FUNKSIES EN GRAFIEKE

AKTIWITEIT 1

VRAAG 4

4.1 Gegee die funksie $p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

4.1.1 Is p 'n stygende of dalende funksie? (1)

4.1.2 Bepaal p^{-1} , die inverse van p , in die vorm $y = \dots$ (2)

4.1.3 Skryf die definisieversameling van p^{-1} neer. (1)

4.1.4 Skryf die vergelyking van die asimptoot van $p(x) - 5$ neer. (1)

4.2 Gegee: $f(x) = \frac{4}{x-1} + 2$

4.2.1 Skryf die vergelyking van die asimptote van f neer. (2)

4.2.2 Bereken die x -afsnit van f . (2)

4.2.3 Teken die grafiek van f , en dui alle asimptote en die afsnitte met die asse aan. (4)

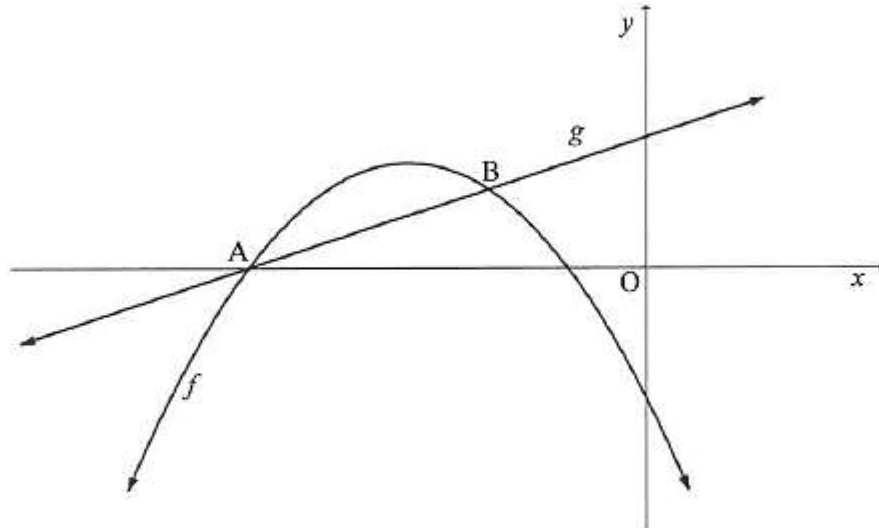
4.2.4 Gebruik jou grafiek om die waardes van x te bepaal waarvoor $\frac{4}{x-1} \geq -2$. (2)

4.2.5 Bepaal die vergelyking van die simmetrie-as van $f(x-2)$, wat 'n negatiewe gradiënt het. (3)

[18]

VRAAG 5

Die grafieke van die funksies $f(x) = -(x+3)^2 + 4$ en $g(x) = x + 5$ is hieronder geteken. Die grafieke sny by A en B.



- 5.1 Skryf die koördinate van die draaipunt van f neer. (2)
- 5.2 Skryf die waardeversameling van f neer. (1)
- 5.3 Toon dat die x -koördinate van A en B onderskeidelik -5 en -2 is. (4)
- 5.4 Vervolgens, bepaal die waardes van c waarvoor die vergelyking $-(x+c+3)^2 + 4 = (x+c) + 5$ EEN negatiewe en EEN positiewe wortel het. (2)
- 5.5 Die maksimum afstand tussen f en g in die interval $x_A < x < x_B$ is k . Indien $h(x) = g(x) + k$, bepaal die vergelyking van h in die vorm $h(x) = \dots$ (5)
- [14]

AKTIWITEIT 2

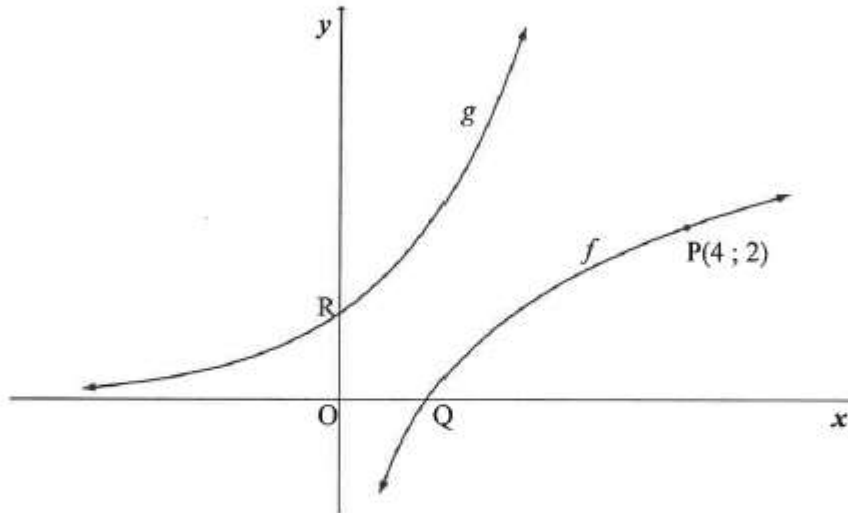
VRAAG 4

Gegee: $g(x) = \frac{1}{x-1} + 2$

- 4.1 Skryf die vergelykings van die asimptote van g neer. (2)
- 4.2 Teken 'n grafiek van g en dui enige afsnitte met die asse en asimptote aan. (4)
- 4.3 Bepaal die waardes van x waarvoor $g(x) > 0$. (2)
- 4.4 Bepaal die vergelyking van die simmetrie-as van g wat 'n negatiewe gradiënt het. (2)
- [10]

VRAAG 5

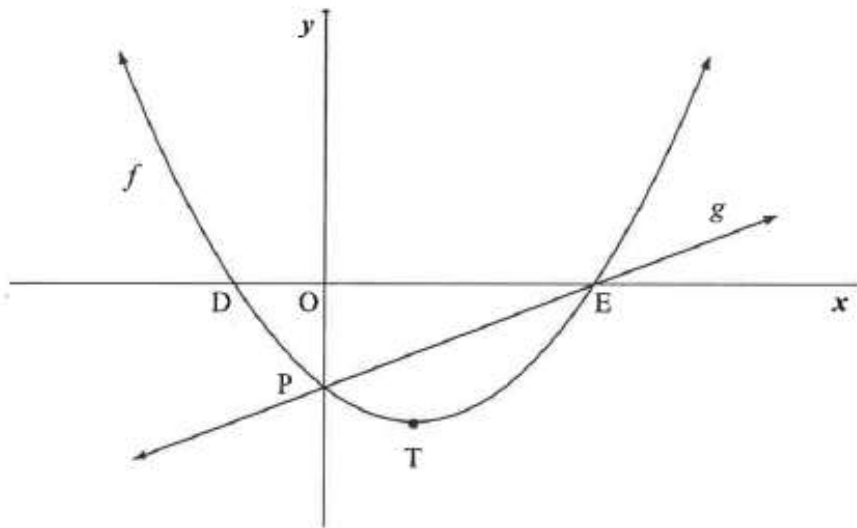
In die diagram is die grafieke van $f(x) = \log_a x$ en g geskets. Grafiek g is die refleksie van f in die lyn $y = x$. Grafiek f gaan deur die punt $P(4; 2)$. Q is die x -afsnit van f en R is die y -afsnit van g .



- 5.1 Skryf die koördinate van P' , die beeld van P op g , neer. (2)
 - 5.2 Toon dat $a = 2$. (2)
 - 5.3 Skryf die vergelyking van g in die vorm $y = \dots$ neer. (1)
 - 5.4 T is 'n punt op f in die eerste kwadrant, met TR ewewydig aan die x -as. Bereken die oppervlakte van $\triangle RTP'$. (4)
- [9]

VRAAG 6

Die grafieke van $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en $g(x) = mx + c$ is hieronder geskets. D en E is die x-afsnitte en P is die y-afsnit van f . Die draaipunt van f is $T(1; -4)$. Die grafieke van f en g sny mekaar by P en E.



- 6.1 Skryf die waardeversameling van f neer. (1)
 - 6.2 Bereken die koördinate van D en E. (3)
 - 6.3 Bepaal die vergelyking van g . (2)
 - 6.4 Skryf die waardes van x neer waarvoor $f(x) - g(x) > 0$. (2)
 - 6.5 Bepaal die maksimum vertikale afstand tussen h en g indien $h(x) = -f(x)$ vir $x \in [-2; 3]$. (5)
 - 6.6 Gegee: $k(x) = g(x) - n$.
Bepaal n indien k 'n raaklyn aan f is. (5)
- [18]

AKTIWITEIT 3

VRAAG 4

Gegee: $f(x) = a^x - 1$ vir $a > 0$. $B\left(2; \frac{-5}{9}\right)$ is 'n punt op f .

4.1 Bereken die waarde van a . (2)

4.2 Skryf die waardeversameling van f neer. (1)

4.3 Skets die grafiek van f . Dui die afsnitte met die asse en asimptote, indien enige, duidelik aan. (3)

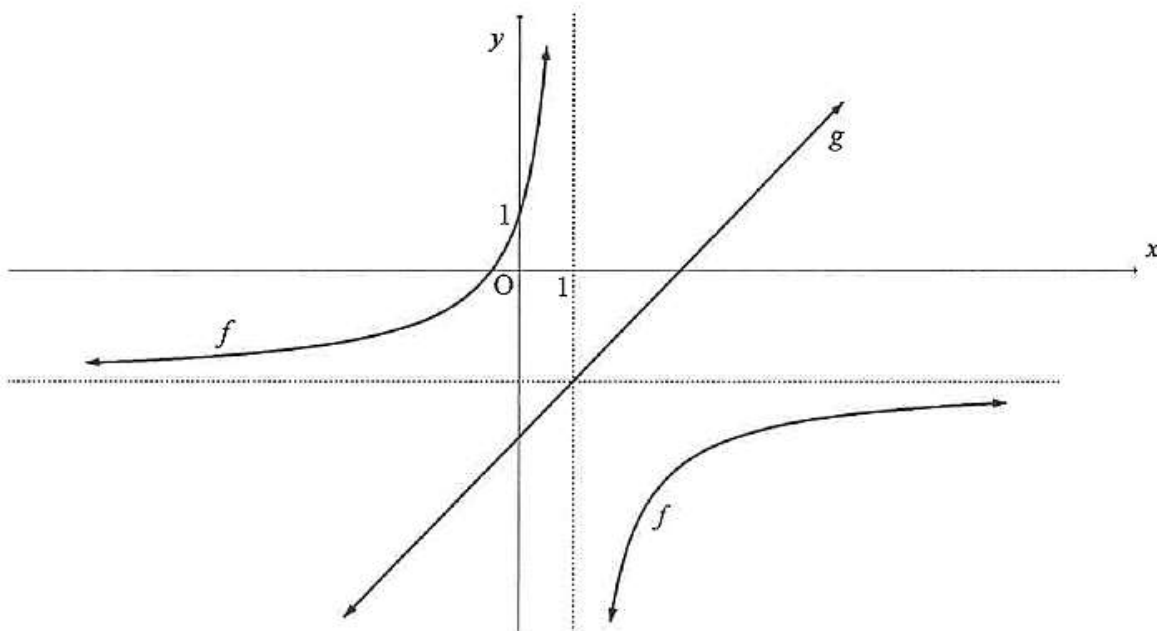
4.4 Daar word verder gegee dat C 'n punt op f is by $y = \frac{19}{8}$.

Bepaal die koördinate van C' , die beeld van C , wanneer C om die lyn $y = x$ gereflekteer word. (3)
[9]

VRAAG 5

Hieronder is die grafiek van $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$ geskets met die definisieversameling $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

Die grafiek van f sny die y -as by $(0; 1)$. 'n Simmetrielyn van f word deur $g(x) = x - 3$ gegee.



5.1 Skryf die waarde van p neer. (1)

5.2 Bepaal die vergelyking van die horisontale asimptoot van f . (2)

5.3 Bereken die waarde van a . (2)

5.4 Vir watter waardes van x is $f(x) \geq 0$? (3)

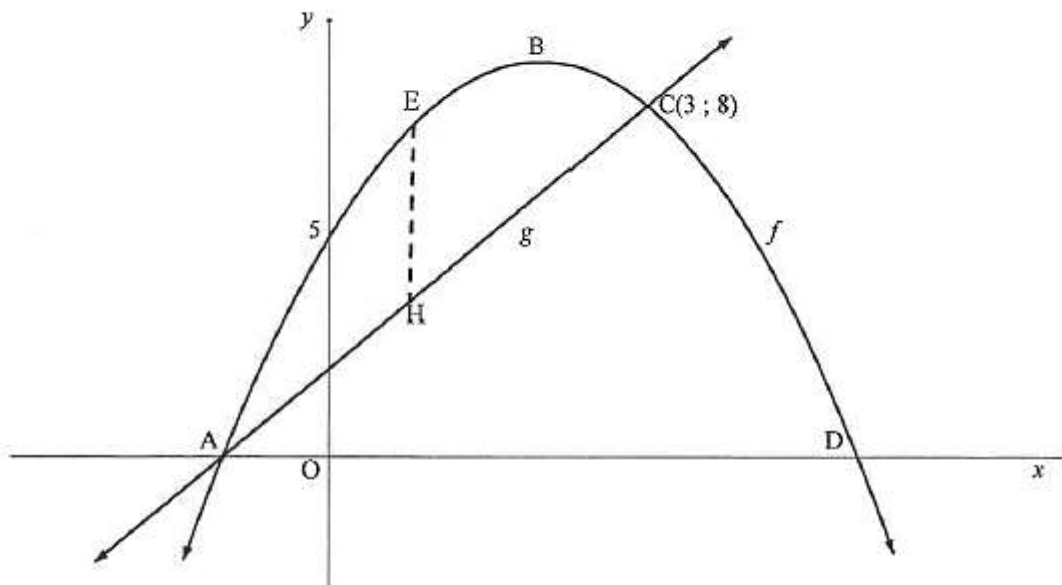
5.5 Grafiek f transformeer na h waar:

- Die definisie- en waardeversamelings van h dieselfde as dié van f is
- $h'(x)$, die afgeleide van h , negatief in die definisieversameling daarvan is

Beskryf 'n moontlike transformasie wat f kon ondergaan het om na h te lei. (2)
[10]

VRAAG 6

In die diagram hieronder is die grafieke van $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ en g , 'n reguitlyn, geskets. $C(3; 8)$ is 'n snypunt van f en g . EH is ewewydig aan die y -as getrek, met E 'n punt op f en H 'n punt op g .



6.1 Bereken die koördinate van B , die draaipunt van f . (3)

6.2 Toon dat die vergelyking van die lyn deur A en C deur $g(x) = 2x + 2$ gegee word. (3)

6.3 Bereken die maksimum lengte van EH vir $f > g$. (4)

6.4 Gegee: $k(x) = f(x + m) = -x^2 - 2mx - m^2 + 4x + 4m + 5$

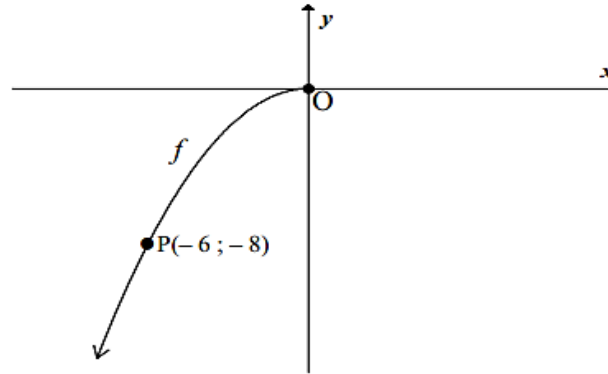
Bepaal die waarde van m sodat g 'n raaklyn aan k is. (5)
[15]

AKTIWITEIT 4

VRAAG 6

Die grafiek van $f(x) = ax^2$, $x \leq 0$ is hieronder geskets.

Die punt $P(-6; -8)$ lê op die grafiek van f .



- 6.1 Bereken die waarde van a . (2)
- 6.2 Bepaal die vergelyking van f^{-1} , in die vorm $y = \dots$ (3)
- 6.3 Write down the range of f^{-1} (1)
- 6.4 Teken die grafiek van f^{-1} , toon die koördinate van 'n punt op die grafiek anders as $(0; 0)$. (2)
- 6.5 Die grafiek van f is die refleksie van in die lyn $y = x$ en daarna word dit gereflekteer in die x -as. Bepaal die vergelyking van die nuwe funksie in die vorm $y = \dots$ (3)

[11]

DIFFERENSIALE REKENING

OORSIG:

1. Die vergelykings van raaklyne aan grafieke.
2. Die vermoë om grafieke van derde graadse funksies te skets.
3. Praktiese probleme met betrekking tot optimalisering en tempo van verandering (insluitende die kalkulus van beweging)

(BRON: KURRIKULUM EN ASSESSERINGSBELEIDSVERKLARING (KABV) VERDERE ONDERWYS- EN OPLEIDINGSFASE GRAAD 10 – 12 : WISKUNDE)

AFDELING 1: SKETS VAN DERDE-GRAADSE FUNKSIE

Neem kennis van die standaardvorm en vorm van 'n derde-graadse funksie:

Standaardvorm: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

As $a > 0$

Lokale maksimum



Lokale minimum

As $a < 0$

Lokale maksimum



Lokale minimum

Stappe om te volg wanneer daar geskets word: (NB – somtyds, indien nie die meeste van die tyd nie, sal jy deur die vraag rigting gegee word waar om te begin, . . . sien die uitgewerkte voorbeeld.)

4. Bepaal die x en y - afsnitte

- a. x – afsnit(te)
 - i. Laat $y = 0$ en vereenvoudig
 - ii. Vind 'n faktor
 - iii. Los op vir x
- b. y – afsnit
 - i. Laat $x = 0$ en los op vir y

5. Bepaal die draaipunte

- a. Vind die eerste afgeleide
- b. Stel gelyk aan nul
- c. Los op vir x (hierdie is die x –waardes van die draaipunte)
- d. Vervang die x –waardes in die oorspronklike funksie om die ooreenstemmende y -waardes te kry)

6. Skets

NB – Neem kennis van die verskillende maniere om die infleksiepunt/buigpunt te vind:

Metode 1

- 7. Vind die tweede afgeleide van die funksie, d.w.s $f''(x)$
- 8. Stel die tweede afgeleide gelyk aan nul en los op vir x . Jy het nou die x -waarde van die buigpunt/infleksiepunt.
- 9. Vervang die x -waarde in die oorspronklike funksie, b.v. $f(x)$, om die ooreenstemmende y -waarde te kry en dus die buigpunt/infleksiepunt.

Metode 2 (Gebruik van die x -waardes van die draaipunte: Die buigpunt lê halfpad tussen die draaipunte van die derde-graadse funksie.)

- 10. Vind die x -waarde van die buigpunt deur die x -waardes van die draaipunte bymekaar te tel en deur twee(2) te deel. Jy het nou die x -waarde van die buigpunt.
- 11. Vervang die x -waarde in die oorspronklike funksie, b.v. $f(x)$, om die ooreenstemmende y -waarde te kry en dus die buigpunt/infleksiepunt.

Uitgewerkte Voorbeeld(e)

Voorbeeld 1

Gegee: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$

1. Toon aan dat $(x - 1)$ 'n faktor van $f(x)$ is.
2. Bepaal, vervolgens of andersins, die x -afsnitte van f
3. Bepaal die koördinate van die draaipunte van f
4. Skets die grafiek van f . Toon ALLE afsnitte met die asse en die draaipunte duidelik aan.

OPLOSSINGS

1.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$$
$$f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - 7(1) + 4$$
$$\therefore f(1) = 0$$
$$\therefore x - 1 \text{ is a factor of } f$$

2.

x -intercepts:

$$f(x) = 0$$
$$x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 0$$
$$(x - 1)(x^2 + 3x - 4) = 0$$
$$(x - 1)(x - 1)(x + 4) = 0$$
$$x = 1 \text{ or } x = -4$$

3.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 7$$

$$f'(x) = 0$$

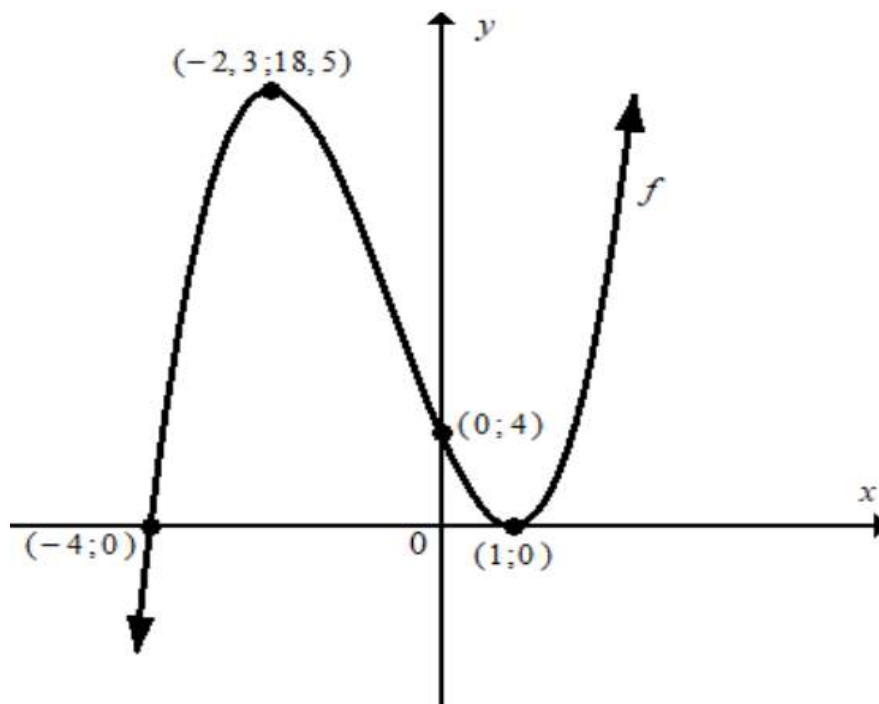
$$\therefore 3x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$(3x + 7)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{7}{3} \text{ or } x = 1$$

$$(-2,3; 18,5) \text{ and } (1;0)$$

4.



Voorbeeld 2

Gegee: $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$

1.1. Teken 'n sketsgrafiek van f , toon alle afsnitte met die asse, en die draaipunte aan.

OPLOSSING

y-afsnit:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 0^2 - 8 \cdot 0 + 12 \\ &= 12 \end{aligned}$$

y-afsnit word gegee deur (0 ; 12)

x-afsnit:

$$(x-2)(x^2 + x - 6) = 0$$

$$(x-2)(x+3)(x-2) = 0$$

$$(x-2) = 0 \text{ or } (x+3) = 0 \text{ or } (x-2) = 0$$

$$x = 2 \text{ or } x = -3 \text{ or } x = 2$$

x-afsnitte word gegee deur (2 ; 0) en (-3 ; 0)

Draaipunte:

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(3x+4)(x-2) = 0$$

$$x = -\frac{4}{3} \text{ of } x = 2$$

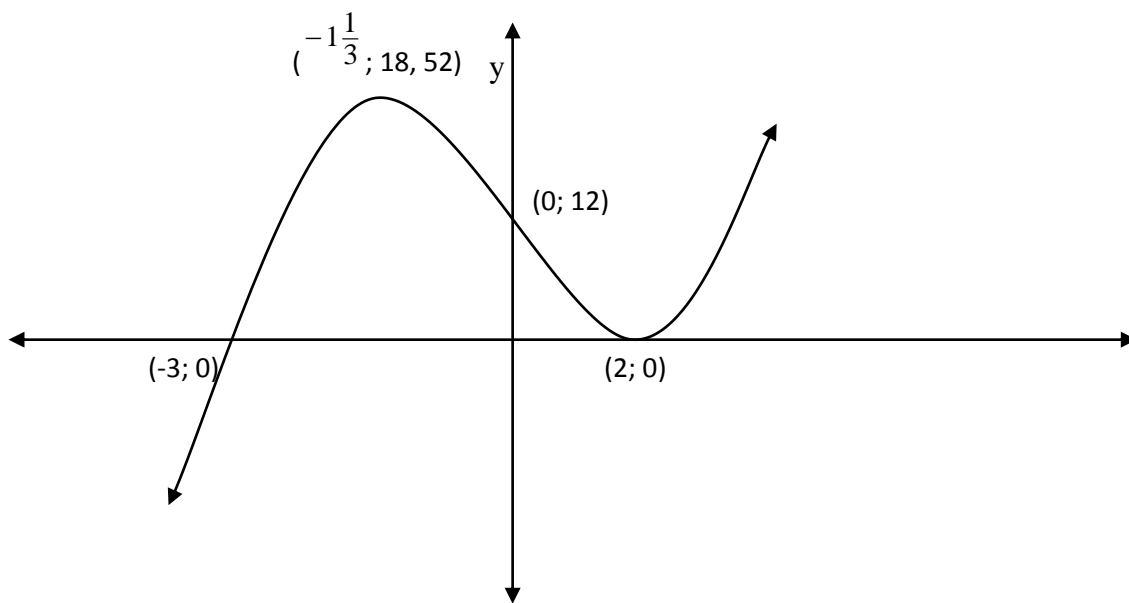
$$y = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 8\left(-\frac{4}{3}\right) + 12$$

$$= \frac{500}{27}$$

$$= 18,52$$

Lokale Maksimum: $\left(-1\frac{1}{3}; 18,52\right)$

Lokale Minimum: (2; 0)



1.2 Bereken die buigpunt/infleksiepunt.

Oplossing:

$$f''(x) = 6x - 2$$

$$6x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

AFDELING 2: BEPALING VAN DIE VERGELYKING VAN DERDE-GRAADSE FUNKSIE EN DIE VERGELYKING VAN 'N RAAKLYN.

Belangrike terminologie en/of notas

- Bepaling van die parameters van die funksie lei tot die bepaling van die vergelyking van die funksie.
- Vergelyking van die raaklyn is die vergelyking van 'n reguitlyn: $y = mx + c$
 - Wat jy benodig...
 - Die kontakpunt
 - Die gradiënt

Voorbeeld 1

Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kurwe, gedefinieer deur

$g(x) = -x^2 - x$ by die punt waar $x = 2$.

OPLOSSING

$$g(x) = -x^2 - x$$

$$g(2) = -(2)^2 - 2 = -6$$

The point of contact is $(2; -6)$

$$g'(x) = -2x - 1$$

$$\therefore m_{\text{tan}} = g'(2) = -2(2) - 1 = -5$$

$$y = mx + c \quad \text{OR} \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$-6 = -5(2) + c \quad \text{OR} \quad y - (-6) = -5(x - 2)$$

$$c = 4 \quad \text{OR} \quad y + 6 = -5x + 10$$

$$\therefore y = -5x + 4$$

Voorbeeld 2

Gegee: $h(x) = -x^3 + ax^2 + bx$ en $g(x) = -12x$. P and Q(2 ; 10) is die draaipunte van h .
Die grafiek van h gaan deur die oorsprong.

Toon aan dat $a = \frac{3}{2}$ en $b = 6$.

OPLOSSING

Vervang/ **in/**
Substitute Q(2; 10) into

$$h(x) = -x^3 + ax^2 + bx$$

$$-2^3 + a(2^2) + b(2) = 10$$

$$-8 + 4a + 2b = 10$$

$$2a + b = 9 \text{line 1}$$

$$h'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

$$\text{At Q: } h'(2) = 0$$

$$-3(2)^2 + 2a(2) + b = 0$$

$$-12 + 4a + b = 0$$

$$4a + b = 12 \text{line 2}$$

$$\text{line 2} - \text{line 1: } 2a = 3$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$\text{Substitute in line 1: } b = 6$$

Vervang in lyn 1:

AFDELING 3: OPTIMALISERING EN TEMPO VAN VERANDERING, INSLUITENDE KALKULUS VAN BEWEGING

Belangrike terminologie en/of notas

Maksimum en minimum kom voor by die draaipunte, dus wanneer maksimeer of minimeer, vind die eerste afgeleide, stel die afgeleide gelyk aan nul en los op vir die onbekende (in die meeste gevalle x). Die waarde(s) van x wat gevind is na oplossing is waar die maksimum of minimum sal plaasvind. Toets die waarde(s) of dit 'n maksimum of minimum waardes gee, deur in die oorspronklike vergelyking te vervang.

Uitgewerkte voorbeeld(e)

Voorbeeld (A)

'n Industrieële oop watertenk, soos getoon in die prent hieronder, het 'n inlaatpyp en 'n uitlaatpyp. Die diepte van die water in die tenk verander voortdurend.



Die vergelyking $D(t) = 4 + 0,5t^2 - 0,25t^3$ gee die diepte (in meter) van die water, waar t die tyd (in ure) voorstel wat verloop het vanaf die diepte lesing 09:00 geneem was.

Bepaal:

- (1) Die diepte van die water in die tenk teen 11:00
- (2) Die tempo van verandering van die diepte van die water in die tenk teen 12:00

OPLOSSINGS

After 2 hrs

$$\begin{aligned} 1. \quad D(2) &= 4 + 0,5(2)^2 - 0,25(2)^3 \text{ m} \\ &= 4m \end{aligned}$$

$$D = 4 + 0,5t^2 - 0,25t^3$$

$$D'(t) = t - 0,75t^2$$

2. At 12:00 (3 hours later):

$$\begin{aligned} D'(3) &= (3) - 0,75(3)^2 \\ &= -3,75 m \cdot h^{-1} \end{aligned}$$

Voorbeeld (B)

Die wins (in R1000de) by 'n maatskappy opgelewer, deur 'n masjien wat bottelkoppe produseer, is afhanklik van die gemiddelde spoed waarteen die masjien loop.

Die wins (P) word bereken deur die formule te gebruik:

$$P = -3v^2 + 30v; \text{ waar } v \text{ die gemiddelde spoed (in kilometer per uur) en } v > 0 \text{ is.}$$

- (1) Bereken die gemiddelde spoed waarby nie 'n wins of 'n verlies opgelewer word nie.
- (2) Bepaal teen watter gemiddelde spoed die masjien moet loop sodat 'n maksimum wins gemaak sal word.
- (3) Bereken, vervolgens of andersins, die gevolglike maksimum wins.

OPLOSSINGS

1.
$$P = -3v^2 + 30v$$

Neither profit nor loss at $P = 0$
$$-3v^2 + 30v = 0$$

$$-3v(v - 10) = 0$$

$$\therefore v = 0 \text{ or } v = 10$$

$$v = 10 \text{ km.h}^{-1}$$

2.
$$P = -3v^2 + 30v$$

$$\frac{dP}{dv} = -6v + 30 = 0$$

$$\therefore v = 5 \text{ km.h}^{-1}$$

3.
$$P_{\max} (\text{in R1000}) = -3(5)^2 + 30(5) = 75$$

OR R75 000

Voorbeeld (C)

'n Deeltjie beweeg langs 'n reguitlyn. Die afstand, s , (in meter) van die deeltjie vanaf 'n vaste punt op die lyn teen 'n tyd, t sekondes ($t \geq 0$) word gegee deur $s(t) = 2t^2 - 18t + 45$.

- 10.1 Bereken die deeltjie se begin snelheid. (Snelheid is die veranderingstempo van afstand).
- 10.2 Bepaal die tempo waarteen die snelheid van die deeltjie verander by t sekondes.
- 10.3 Na hoeveel sekondes sal die deeltjie die naaste aan die vaste punt wees?

OPLOSSING

10.1	$s(t) = 2t^2 - 18t + 45$ $s'(t) = 4t - 18$ $s'(0) = 4(0) - 18$ $= -18 \text{ m/s}$
10.2	$s''(t) = 4 \text{ m/s}^2$
10.3	$4t - 18 = 0$ $4t = 18$ $t = \frac{9}{2} \text{ seconds or } 4,5 \text{ seconds}$ <p>OR</p> $s(t) = 2\left(t - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$ $t = \frac{9}{2} \text{ seconds or } 4,5 \text{ seconds}$ <p>OR</p> $s(t) = 2t^2 - 18t + 45$ $t = -\frac{-18}{2(2)}$ $t = \frac{9}{2} \text{ seconds or } 4,5 \text{ seconds}$

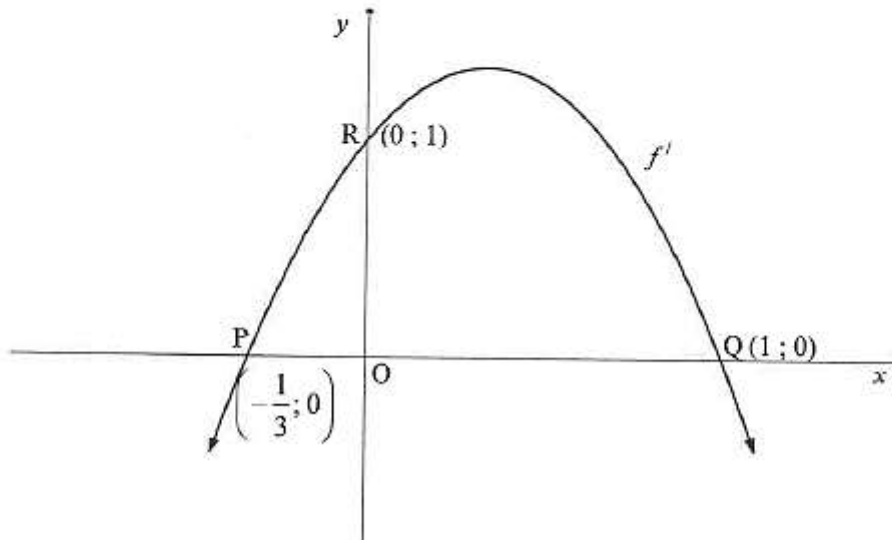
AFDELING 4: AKTIWITEITE VAN DIFFERENSIALE REKENING

Aktiwiteit 1

VRAAG 8

Die grafiek van $y = f'(x) = mx^2 + nx + k$ is hieronder geteken.

Die grafiek gaan deur die punte $P\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$, $Q(1; 0)$ en $R(0; 1)$.



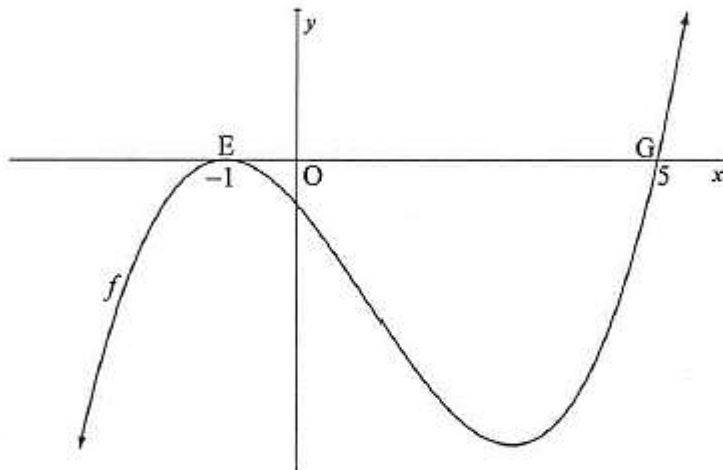
- 8.1 Bepaal die waardes van m , n en k . (6)
- 8.2 Indien dit verder gegee word dat $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$:
- 8.2.1 Bepaal die koördinate van die draaipunte van f . (3)
- 8.2.2 Skets die grafiek van f . Dui die koördinate van die draaipunte en die afsnitte met die asse op jou grafiek aan. (5)
- 8.3 Punte E en W is twee veranderlike punte op f' en is op dieselfde horisontale lyn.
- h is 'n raaklyn aan f' by E.
 - g is 'n raaklyn aan f' by W.
 - h en g sny by $D(a; b)$.
- 8.3.1 Skryf die waarde van a neer. (1)
- 8.3.2 Bepaal die waarde(s) van b waarvoor h en g nie meer raaklyne aan f' sal wees nie. (2)

[17]

Aktiwiteit 2

VRAAG 9

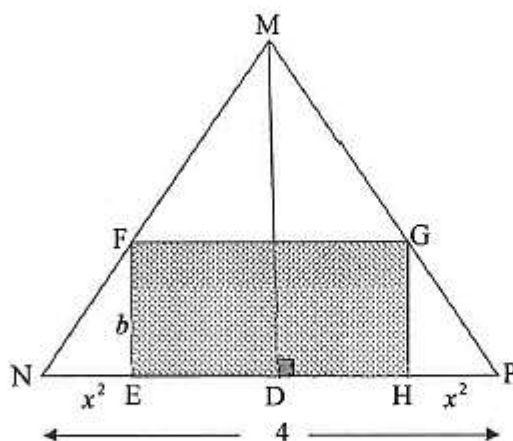
Die grafiek van $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$ is hieronder geskets. $E(-1; 0)$ en $G(5; 0)$ is die x -afsnitte van f .



- 9.1 Toon dat $a = 1$, $b = -3$ en $c = -9$. (3)
- 9.2 Bereken die waarde van x waarvoor f 'n lokale minimum waarde het. (4)
- 9.3 Gebruik die grafiek om die waardes van x te bepaal waarvoor $f''(x) \cdot f(x) > 0$. (3)
- 9.4 Vir watter waardes van t sal die grafiek van $p(x) = f(x) + t$ twee verskillende positiewe wortels en een negatiewe wortel hê? (3)
- [13]

VRAAG 10

EHGF is 'n reghoek. HE word x^2 cm verleng na N en EH word x^2 cm verleng na P. NF verleng, sny PG verleng by M om 'n gelykbenige driehoek MNP met $NM = MP$ te vorm. D is 'n punt op NP waar $MD \perp NP$. $NP = 4$ cm en $MD = 3$ cm.



- 10.1 Toon dat die area van EFGH deur $A(x) = 6x^2 - 3x^4$ gegee word. (4)
- 10.2 Bereken die maksimum oppervlakte van reghoek EFGH. (4)
- [8]

Aktiwiteit 3

VRAAG 8

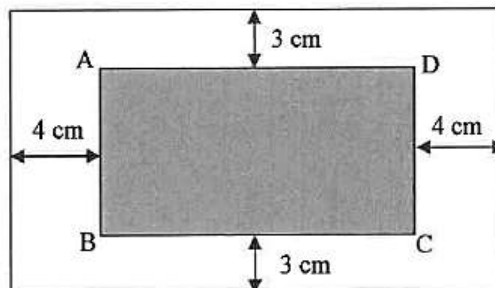
Gegee: $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4 = (x-1)^2(-x+4)$

- 8.1 Bepaal die koördinate van die draaipunte van f . (4)
- 8.2 Teken 'n sketsgrafiek van f . Dui duidelik alle snytpunte met die asse en enige draaipunte aan. (4)
- 8.3 Gebruik die grafiek om die waarde(s) van k te bepaal waarvoor $-x^3 + 6x^2 - 9x + 4 = k$ drie reële en ongelyke wortels sal hê. (2)
- 8.4 Die lyn $g(x) = ax + b$ is die raaklyn aan f by f se infleksiepoint. Bepaal die vergelyking van g . (6)
- 8.5 Bereken die waarde van θ , die skerphoek gevorm tussen g en die x -as in die eerste kwadrant. (2)

[18]

VRAAG 9

Die diagram hieronder stel 'n gedrukte plakkaat voor. Reghoek ABCD is die deel waarop die teks gedruk word. Hierdie ingekleurde oppervlakte ABCD is 432 cm^2 en $AD = x \text{ cm}$. ABCD is 4 cm vanaf die linkerkant en regterkant van die bladsy en 3 cm vanaf die bokant en onderkant van die bladsy.



- 9.1 Toon dat die totale oppervlakte van die bladsy gegee word deur:
 $A(x) = \frac{3456}{x} + 6x + 480$ (3)
- 9.2 Bepaal die waarde van x sodanig dat die totale oppervlakte van die bladsy 'n minimum is. (3)

[6]

Aktiwiteit 4

VRAAG 8

Gegee: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$

- 8.1 Skryf die y -afsnit van f neer. (1)
- 8.2 Toon dat 2 'n wortel van die vergelyking $f(x) = 0$ is. (2)
- 8.3 Faktoriseer vervolgens $f(x)$ volledig. (3)
- 8.4 Indien dit verder gegee word dat die koördinate van die draaipunte naastenby $(0,7; -12,6)$ en $(-3,4; 20,8)$ is, teken die grafiek van f en dui al die afsnitte en draaipunte aan. (3)
- 8.5 Gebruik jou grafiek om die waardes van x te bepaal waarvoor:
- 8.5.1 $f'(x) < 0$ (2)
- 8.5.2 Die gradiënt van 'n raaklyn aan f 'n minimum is (2)
- 8.5.3 $f'(x) \cdot f''(x) \leq 0$ (3)
- [16]

VRAAG 9

'n Draad, 12 meter lank, word in twee stukke geknip. Die een deel word gebuig om 'n gelyksydige driehoek te vorm en die ander 'n vierkant. 'n Sy van die driehoek se lengte is $2x$ meter.

- 9.1 Skryf die lengte van 'n sy van die vierkant in terme van x neer. (2)
- 9.2 Indien hierdie vierkant nou as die basis van 'n reghoekige prisma met 'n hoogte van $4x$ meter gebruik word, bepaal die maksimum volume van die reghoekige prisma. (7)
- [9]

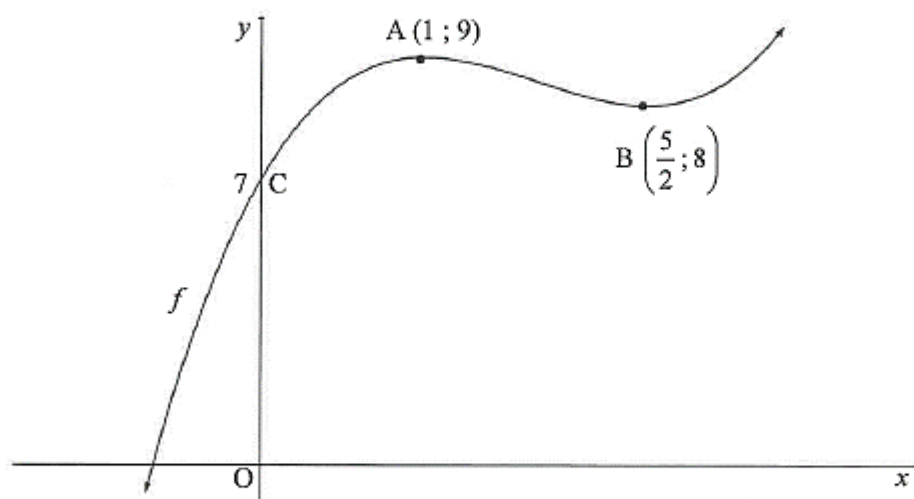
Aktiwiteit 5

- 8.2 Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$ by $x = 2$. (3)
- 8.3 Gegee: $f(x) = -6x^2$
- 8.3.1 Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels. (5)
- 8.3.2 Skryf neer hoe jy die definisieversameling van f sal beperk sodanig dat f^{-1} , die inverse van f , 'n funksie is. (1)
- 8.3.3 Bepaal die vergelyking van f^{-1} vir $f^{-1}(x) \leq 0$. Skryf jou antwoord in die vorm $y = \dots$ neer. (3)
- [18]

VRAAG 9

$A(1; 9)$ en $B\left(\frac{5}{2}; 8\right)$ is die draaipunte van grafiek f hieronder.

$C(0; 7)$ is die y -afsnit van f .



- 9.1 Vir watter waardes van x is f dalend? (2)
- 9.2 Skryf die x -afsnitte van f' , die afgeleide van f , neer. (2)
- 9.3 Vir watter waardes van x sal f konkaaf op wees? (2)
- 9.4 Bepaal die waarde van k waarvoor $y = f(x) + k$ DRIE positiewe x -afsnitte sal hê. (2)
- [8]

VRAAG 10

'n Fietsryer het vanaf dorp P gery en in dorp T gestop. Die spoed (in km/h) waarteen hierdie fietsryer gery het, word deur die vergelyking $s'(t) = -3t^2 + 18t$ voorgestel.

LET WEL: Spoed is die tempo van verandering van afstand met betrekking tot tyd.

- 10.1 Bereken die maksimum spoed wat die fietsryer gedurende hierdie rit bereik het. (3)
- 10.2 Bereken die afstand tussen dorp P en dorp T. (5)
- [8]

WAARSKYNLIKHEID

Oorsig:

- (a) Afhanklike en Onafhanklike gebeurtenisse.
- (b) Venn-diagramme of gebeurlikheidstabelle en boomdiagramme as hulpmiddels om waarskynlikheid probleme op te los. (waar gebeurtenisse nie noodwendig

(BRON: KURRIKULUM EN ASSESSERINGSBELEID VERKLARING (KABV) VOO FASE GR 10 – 12 WISKUNDE)

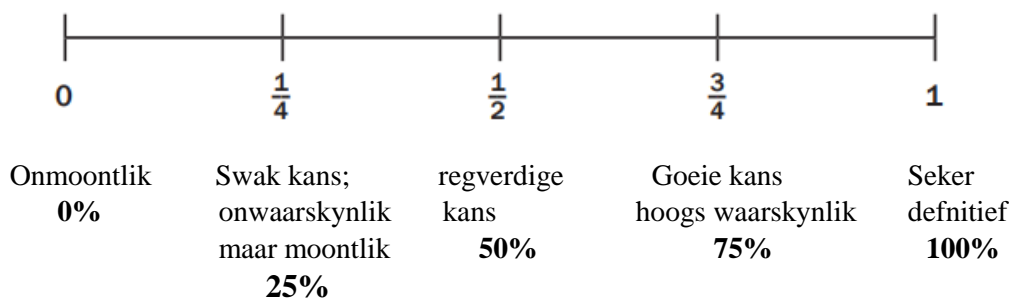
AFDELING 1: ALGEMENE WAARSKYNLIKHEID

Waarskynlikheid verwys na die moonlikheid of kans dat 'n gebeurtenis kan plaasvind.

$$\text{Die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis} = \frac{\text{aantal gunstige uitkomst}}{\text{totale aantal moonlike uitkomst}}$$

Die verhouding kan uitgedruk word as 'n egte breuk of 'n desimale breuk of 'n persentasie. expressed as a
So 'n waarskynlikheid van 5 uit 8 kan geskryf word as $\frac{5}{8}$ of as 0,625 of as 62,5%.

Ons kan 'n waarskynlikheids skaal gebruik om te besluit watter kans daar is vir 'n gebeurtenis om plaas te vind.



Notasies wat gebruik word om die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis te bepaal:

- $P(A)$ beteken die waarskynlikheid dat gebeurtenis A plaasvind
- $P(A')$ of $P(\text{nie } A)$ beteken die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis nie plaasvind nie.
- $P(A \text{ of } B) = P(A \cup B)$ beteken die waarskynlikheid van A of B vind plaas.
 \cup is die simbool vir **of**, dit staan ook bekend as vereniging.
- $P(A \text{ en } B) = P(A \cap B)$ beteken die waarskynlikheid dat A en B plaasvind.
 \cap is die simbool vir **en**, dit staan ook bekend as die interseksie.

Die Identiteit

Vir enige twee gebeurtenisse A en B:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$$

Die Optellingsreël vir Onderling uitsluitende Gebeurtenisse

Twee gebeurtenisse word onderling uitsluitend genoem as beide gebeurtenisse nie gelyktydig kan plaasvind nie.

Wanneer gebeurtenisse A en B onderling uitsluitend is, $P(A \text{ en } B) = 0$

$$\text{dan is: } P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$$

Die Komplementêre Reël:

Vir twee gebeurtenisse A en B: $P(\text{nie } A) = 1 - P(A)$

Die Produk Reël vir Onafhanklike Gebeurtenisse

Wanneer twee gebeurtenisse A en B onafhanklik is, dan

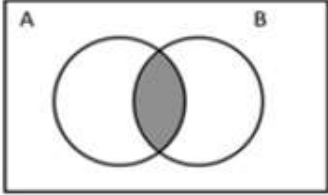
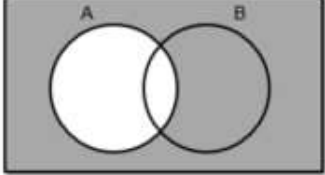
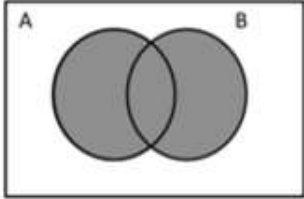
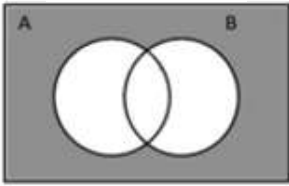
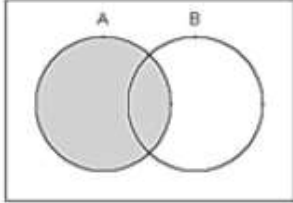
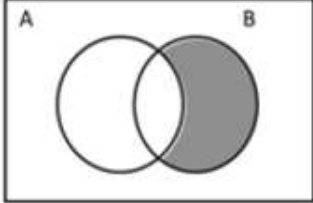
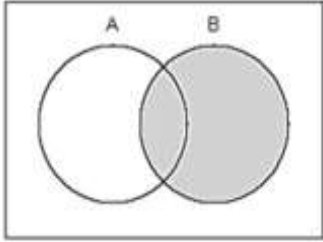
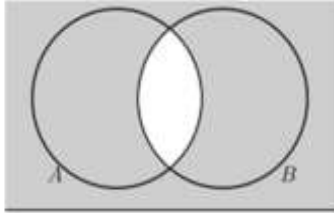
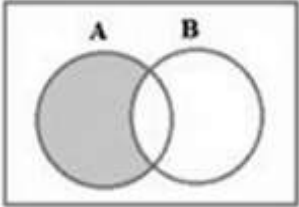
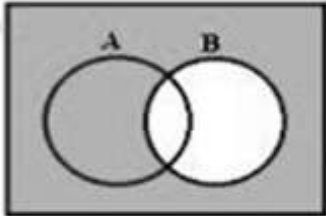
$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$$

Waarskuiwing

Net omdat twee gebeurtenisse onderling uitsluitend is, beteken nie noodwendig dat hulle onafhanklik is nie. Om te toets of gebeurtenisse onderling uitsluitend is, toets altyd of $P(A \text{ en } B) = 0$. Om te toets of gebeurtenisse onafhanklik is, toets altyd of $P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$. Sien die oefeninge hieronder vir voorbeelde van gebeurtenisse wat onderling uitsluitend en onafhanklik is, in verskillende kombinasies.

AFDELING 2: VENN DIAGRAMME

Die skadu-streke stel die gebeurtenisse bo die Venn diagramme voor.

<p>A en B</p> 	<p>nie A</p> 
<p>A of B</p> 	<p>nie(A of B)</p> 
<p>A</p> 	<p>slegs B</p> 
<p>B</p> 	<p>nie(A en B)</p> 
<p>slegs A</p> 	<p>nie B</p> 

Uitgewerkte Voorbeelde 1

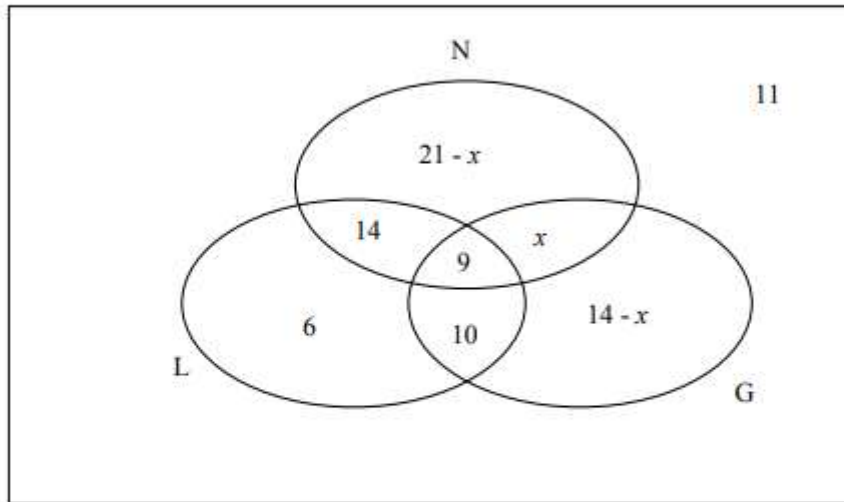
VRAAG 4

- 4.1 'n Opname onder 80 studente by 'n plaaslike biblioteek het die leesvoorkeure hieronder uitgewys:
- 44 lees die *National Geographic*-tydskrif
33 lees die *Getaway*-tydskrif
39 lees die *Leadership*-tydskrif
23 lees beide *National Geographic*- en *Leadership*-tydskrifte
19 lees beide *Getaway*- en *Leadership*-tydskrifte
9 lees al drie tydskrifte
69 lees ten minste een tydskrif
- 4.1.1 Hoeveel studente lees geen tydskrif nie? (1)
- 4.1.2 Laat die aantal studente wat *National Geographic* en *Getaway* lees, maar nie *Leadership* nie, deur x voorgestel word. Stel die leesvoorkeure op 'n Venn-diagram voor. (5)
- 4.1.3 Toon gevolglik dat $x = 5$. (3)
- 4.1.4 Wat is die waarskynlikheid, korrek tot DRIE desimale plekke, dat 'n student wat ewekansig gekies is, ten minste twee van die drie tydskrifte lees? (3)
- 4.2 'n Rookverklikkersisteem in 'n groot pakhuis maak van twee toestelle, A en B, gebruik. Indien rook teenwoordig is, is die waarskynlikheid dat dit deur toestel A bespeur sal word, 0,95. Die waarskynlikheid dat dit deur toestel B bespeur sal word, is 0,98 en die waarskynlikheid dat dit deur beide toestelle gelyktydig bespeur sal word, is 0,94.
- 4.2.1 Indien rook teenwoordig is, wat is die waarskynlikheid dat dit deur toestel A of toestel B of beide toestelle bespeur sal word? (3)
- 4.2.2 Wat is die waarskynlikheid dat die rook nie bespeur sal word nie? (1)

Oplossing

4.1.1 11 studente

4.1.2 Laat N die aantal studente wat die *National Geographic*-tydskrif lees, G die studente wat die *Getaway*-tydskrif lees en L die studente wat die *Leadership*-tydskrif lees, voorstel.



$$4.1.3 \quad 21 - x + x + 14 - x + 9 + 14 + 10 + 6 + 11 = 80$$

$$85 - x = 80$$

$$x = 5$$

$$4.1.4 \quad P(\text{student lees ten minste twee tydskrifte}) = \frac{5 + 14 + 10 + 9}{80} = 0,475$$

✓ antwoord (1)

✓ 6
✓ 11
✓ $21 - x$
✓ $14 - x$
✓ ander waardes (5)

✓ ✓ opstel van vergelyking
✓ vereenvoudiging (3)

✓ teller
✓ deel deur 80
✓ antwoord (3)

4.2.1

$$P(\text{rook deur toestel A of toestel B bespeur})$$

$$= P(\text{rook deur A bespeur}) + P(\text{rook deur B bespeur}) - P(\text{rook deur beide bespeur})$$

$$= 0,95 + 0,98 - 0,94$$

$$= 0,99$$

$$4.2.2 \quad P(\text{rook nie bespeur nie}) = 1 - 0,99 = 0,01$$

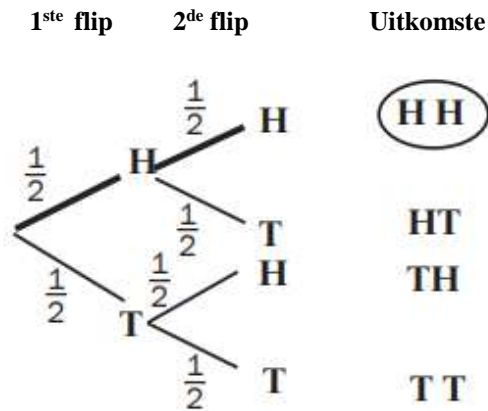
✓ formule

✓ substitusie van waarskynlikhede
✓ antwoord (3)

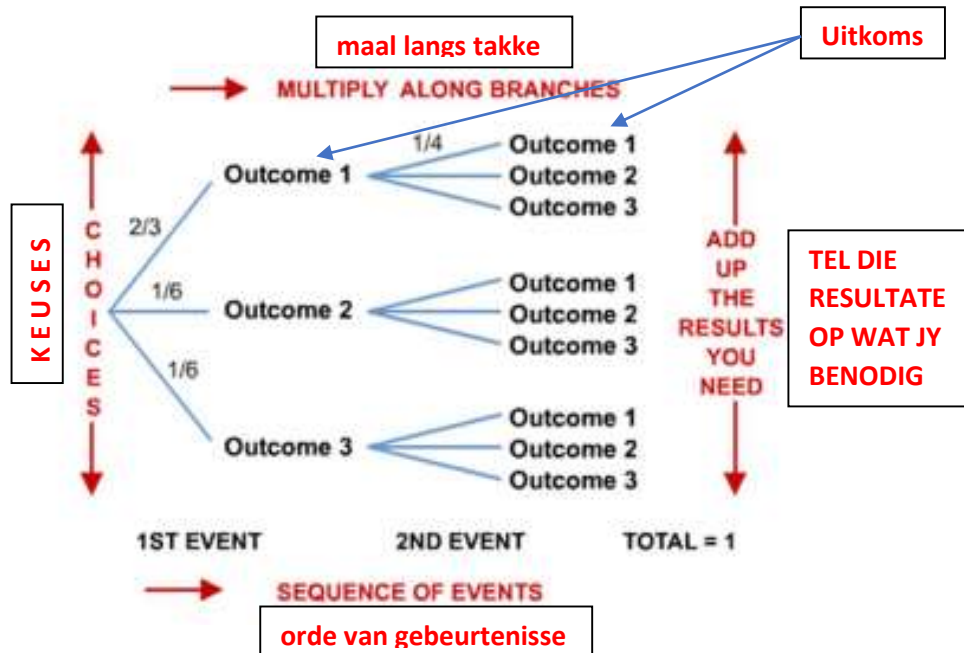
✓ antwoord (1)

AFDELING 3: BOOM-DIAGRAMME

'n Boomdiagram is 'n prent wat jou help om al die moontlike uitkomst van die gebeurtenisse te lys. Hier is 'n boomdiagram vir P(H en H) as jy 'n muntstuk tweekeer flip/opskiet.

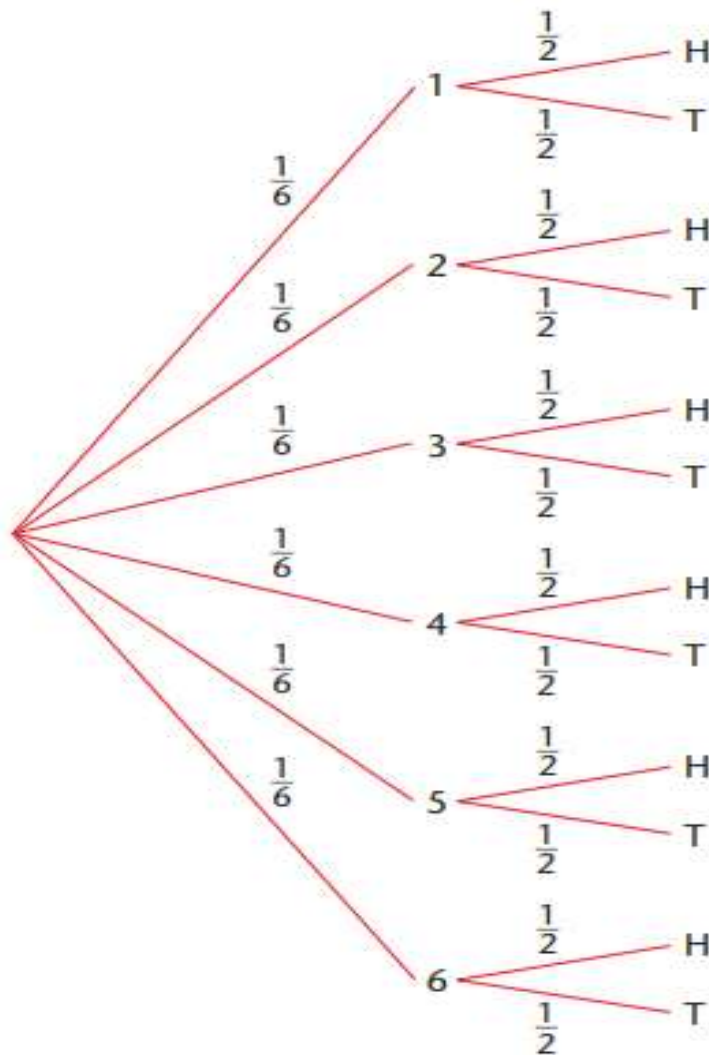


In 'n boomdiagram (wanneer die voltooi is), om die waarskynlikheid van 'n uitkoms te vind vermenigvuldig ons die langs die takke. As meer as een uitkoms die resultate bevredig, dan tel ons die antwoorde bymekaar wat ons gekry het nadat ons vermenigvuldig het. Onthou dat elke groep/klomp takke moet op tel tot 'n waarskynlikheid van 1.



Wanneer meer as een gebeurtenis opeenvolgend plaasvind of gelyktydig, is dit handig om dit met 'n boomdiagram voor te stel. Ons stel elke gebeurtenis deur 'n kolom van takke voor en die aantal takke word deur die aantal moontlike uitkomst vir die gebeurtenis bepaal.

Byvoorbeeld, as 'n dobbelsteen gegooi word, is daar ses moontlike uitkomst, nommers 1 tot 6, wat ons deur ses verskillende lyne/takke voorstel, getrek vanaf dieselfde beginpunt. As 'n muntstuk opgeskiet word (met twee moontlike uitkomst, kop of stert), teken ons 'n boomdiagram soos hieronder getoon.



Uitgewerkte Voorbeeld 1

VRAAG 4

Syfers verkry vanaf 'n stad se polisie departement het 'n aanduiding gegee dat uit alle motors wat as gesteel gerapporteer word, 80% deur sindikate gesteel word om verkoop te word en 20% deur individuele persone vir hul eie gebruik gesteel word.

Van die motors wat waarskynlik deur sindikate gesteel is:

- Is 24% binne 48 uur gevind
- Is 16% na 48 uur gevind
- Is 60% nooit gevind nie

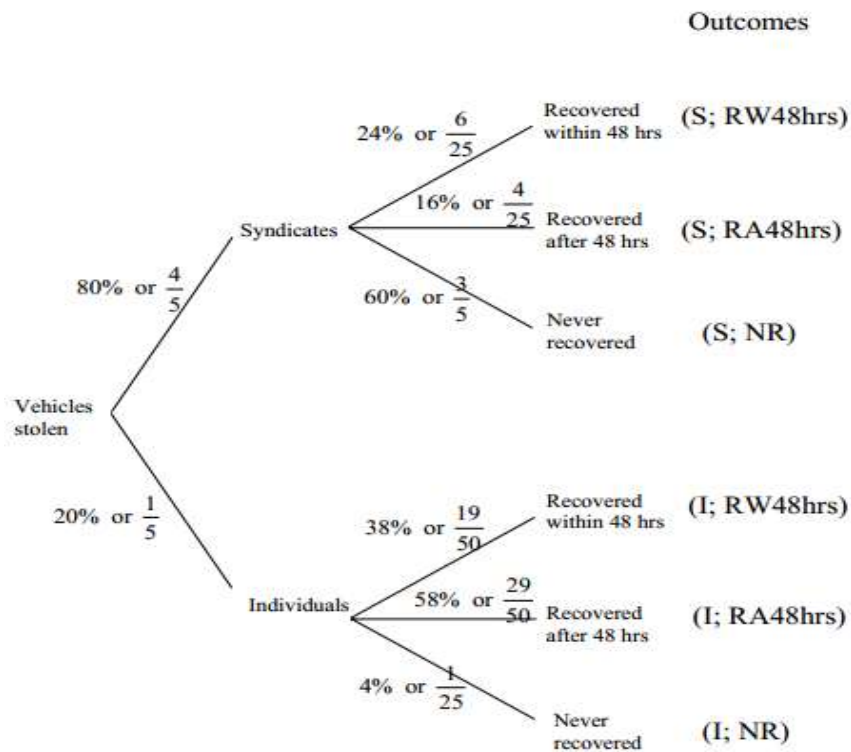
Van die motors wat waarskynlik deur individuele persone gesteel is:

- Is 38% binne 48 uur gevind
- Is 58% na 48 uur gevind
- Is 4% nooit gevind nie

- | | | |
|-----|---|-------------|
| 4.1 | Teken 'n boomdiagram vir die inligting hierbo. | (5) |
| 4.2 | Bereken die waarskynlikheid dat, indien 'n voertuig in hierdie stad gesteel word, dit deur 'n sindikaat gesteel sal word en binne 48 uur gevind sal word. | (2) |
| 4.3 | Bereken die waarskynlikheid dat 'n voertuig wat in hierdie stad gesteel word, nie gevind sal word nie. | (3) |
| | | [10] |

OPLOSSING

4.1



$$4.2 \quad P(S; RW48hrs) = \frac{80}{100} \times \frac{24}{100} = \frac{1920}{10\,000} = 0,192 = 19,2\% \quad (0,19)$$

OR

$$P(S; RW48hrs) = \frac{4}{5} \times \frac{6}{25} = \frac{24}{125}$$

$$4.3 \quad P(\text{stolen and not recovered}) = \left(\frac{80}{100} \times \frac{60}{100} \right) + \left(\frac{20}{100} \times \frac{4}{100} \right) = 0,488 = 48,8\% \quad (0,49)$$

OR

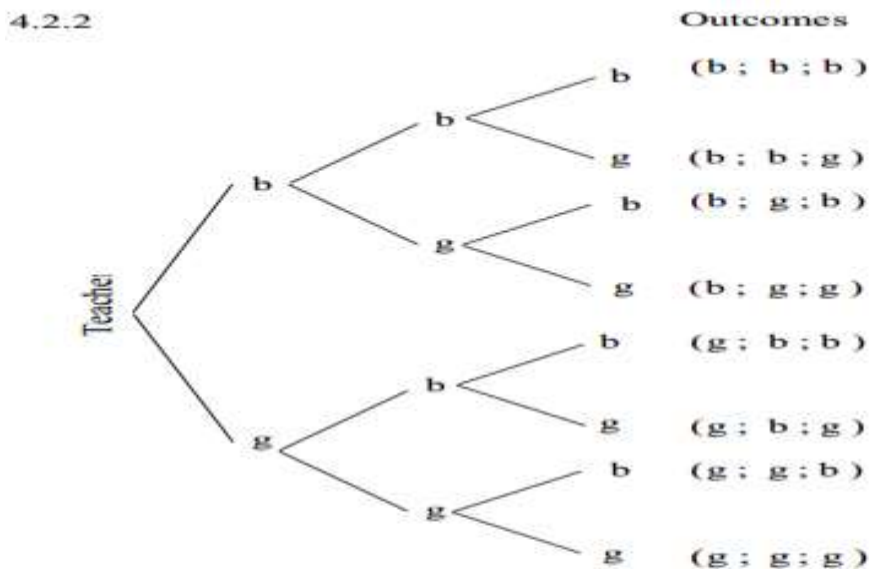
$$P(\text{stolen and not recovered}) = \left(\frac{4}{5} \times \frac{3}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{25} \right) = \frac{12}{25} + \frac{1}{125} = \frac{61}{125}$$

Uitgewerkte Voorbeeld (Geen vervanging)

- 4.2 Daar is 20 seuns en 15 dogters in 'n klas. Die onderwyser kies individuele leerders blindelings om 'n toespraak te maak.
- 4.2.1 Bereken die waarskynlikheid dat die eerste leerder 'n seun is.
- 4.2.2 Teken 'n boomdiagram om die situasie voor te stel as die onderwyser drie leerders, een na die ander, kies. Toon op jou diagram AL die moontlike uitkomst.
- 4.2.3 Bereken die waarskynlikheid dat 'n seun, dan 'n dogter en dan nog 'n seun in daardie orde gekies word.
- 4.2.4 Bereken die waarskynlikheid dat al drie leerders wat gekies is, dogters is.
- 4.2.5 Bereken die waarskynlikheid dat ten minste een van die leerders wat gekies is, 'n seun is.

OPLOSSING

4.2.1 $P(\text{boy chosen first}) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} = 0,57.$



4.2.3 $P(b ; g ; b) = \frac{20}{35} \times \frac{15}{34} \times \frac{19}{33} = \frac{190}{1309} = 0,15$

4.2.4 $P(g ; g ; g) = \frac{15}{35} \times \frac{14}{34} \times \frac{13}{33} = \frac{13}{187} = 0,07$

4.2.5 $P(\text{at least one boy}) = 1 - P(\text{three girls chosen})$
 $= 1 - 0,07$
 $= 0,93$

AFDELING 4: TWEE-RIGTING GEBEURTELIKHEIDS-TABELLE

Twee-rigting gebeurteliksheidstabelle is 'n metode wat gebruik word om data te organiseer en voor te stel, wat **twee kategorieëse veranderlikes** betrek. Hulle help leerders om te analiseer en waarskynlikhede, gebaseer op werklike voorbeelde of opname data, te bereken.

	A_1	B_1	TOTAAL
B_1	p	q	$p + q$
B_2	r	s	$r + s$
TOTAAL	$p + r$	$q + s$	$p + q + r + s = n$

Hieronder is 'n paar voorbeelde oor hoe om waarskynlikhede te vind deur gebeurteliksheidstabelle te gebruik.

$$P(A_1) = \frac{p + r}{n}$$

$$P(B_2) = \frac{r + s}{n}$$

$$P(A_1 \cap B_2) = \frac{r}{n}$$

Uitgewerkte Voorbeeld 1

VRAAG 5

In 'n opname is 1 530 valduikers gevra of hulle al 'n ledemaat gebreek het. Die uitslag van die opname was soos volg:

	Het al 'n ledemaat gebreek	Nie 'n ledemaat gebreek nie	TOTAAL
Manlik	463	b	782
Vroulik	a	c	d
TOTAAL	913	617	1 530

- 5.1 Bereken die waardes van a , b , c en d . (4)
 - 5.2 Bereken die waarskynlikheid om ewekansig in die opname 'n vroulike valduiker te kies wat nie 'n ledemaat gebreek het nie. (2)
 - 5.3 Is om 'n vroulike valduiker te wees en om al 'n ledemaat te gebreek het, onafhanklik van mekaar? Gebruik berekeninge, korrek tot TWEE desimale plekke, om jou antwoord te motiveer. (4)
- [10]**

OPLOSSING

5.1	$a = 450$ $b = 319$ $c = 298$ $d = 748$	✓ antw vir a ✓ antw vir b ✓ antw vir c ✓ antw vir d (4)
5.2	$P(\text{Vrou wat nie 'n ledemaat gebreek het nie})$ $= \frac{298}{1530}$ $= \frac{149}{765}$	✓ 298 ✓ antwoord (2)
5.3	$P(\text{Vrou \& 'n ledemaat gebreek})$ $= \frac{450}{1530}$ $= \frac{5}{17}$ $= 0,2941176471...$ $= 0,29$ OF $P(\text{Vroulik}) \times P(\text{'n ledemaat gebreek})$ $= \frac{748}{1530} \times \frac{913}{1530}$ $= 0,29$ Die gebeurtenis om 'n vrou te wees en om 'n ledemaat te breek is onafhanklik. As 'n kandidaat nie onafhanklik antwoord, omdat die antwoord nie akkuraat is tot meer as 2 desimale plekke nie, ken volpunte toe.	✓ $\frac{463}{1530}$ ✓✓ $\frac{782}{1530} \times \frac{913}{1530}$ ✓ onafhanklik (4) [10]

Uitgewerkte Voorbeeld 2

VRAAG 6

Die data hieronder is verkry vanaf die finansiële hulp-kantoor by 'n spesifieke universiteit.

	ONTVANG FINANSIËLE HULP	ONTVANG NIE FINANSIËLE HULP NIE	TOTAAL
Voorgaads	4 222	3 898	8 120
Nagraads	1 879	731	2 610
TOTAAL	6 101	4 629	10 730

- 6.1 Bepaal die waarskynlikheid dat 'n student wat willekeurig gekies word, ...
- 6.1.1 finansiële hulp ontvang. (2)
- 6.1.2 'n nagraadse student is wat geen finansiële hulp ontvang nie. (2)
- 6.1.3 'n voorgraadse student is wat finansiële hulp ontvang. (2)
- 6.2 Is die gebeurtenisse om 'n voorgraadse student te wees en om finansiële hulp te ontvang, onafhanklik? Toon ALLE relevante berekeninge om jou antwoord te ondersteun. (4)
- [10]**

Oplossing

6.1.1	$P(\text{students receiving financial aid}) = \frac{6\,101}{10\,730} = 0,57$	Answer only: Full marks
6.1.2	$P(\text{postgraduate not receiving financial aid}) = \frac{731}{10\,370} = 0,068$	Answer only: Full marks Also accept: $\frac{731}{2\,610}$
6.1.3	$P(\text{undergraduate receiving financial aid}) = \frac{4\,222}{10\,370} = 0,39$	Answer only: Full marks Also accept: $\frac{4\,222}{8\,120}$
6.2	<p>Let UG be the event of being an undergraduate and RF be the event of receiving financial aid.</p> <p>$P(\text{UG and RF}) = \frac{4\,222}{10\,730} = 0,39$</p> <p>$P(\text{UG}) \times P(\text{RF}) = \frac{8\,120}{10\,730} \times \frac{6\,101}{10\,730} = 0,43$ OR $0,76 \times 0,57 = 0,4332$</p> <p>$P(\text{UG and RF}) \neq P(\text{UG}) \times P(\text{RF})$</p> <p>The event of being an undergraduate and receiving financial aid are NOT independent.</p>	

AFDELING 5: AKTIWITEITE VIR WAARSKYNLIKHEID

Aktiwiteit 1

VRAAG 11

'n Sekere aantal leerders lê eksamens in Wiskunde, Toerisme en Geografie af.

- Al hierdie leerders lê ten minste een van hierdie eksamens af.
- Die totale getal leerders wat Wiskunde (M) aflê, is 22.
- Die totale getal leerders wat Toerisme (T) aflê, is 16.
- Die totale getal leerders wat Geografie (G) aflê, is 18.
- 5 leerders lê Wiskunde en Toerisme af, maar nie Geografie nie.
- 4 leerders lê Wiskunde en Geografie af, maar nie Toerisme nie.
- 3 leerders lê Toerisme en Geografie af, maar nie Wiskunde nie.
- 6 leerders lê slegs Toerisme af.

- 11.1 Teken 'n Venn-diagram om AL die leerders voor te stel wat hierdie eksamens aflê. (3)
- 11.2 Bereken die waarskynlikheid dat 'n leerder wat willekeurig gekies word, eksamens in ten minste TWEE van die vakke sal aflê. (2)
- 11.3 Bepaal of die gebeurtenisse: aflê van die Wiskunde-eksamen en aflê van die Toerisme-eksamen, onafhanklik is. Ondersteun jou antwoord met die nodige berekeninge. (4)
- [9]

Aktiwiteit 2

VRAAG 10

- 10.1 A en B is onafhanklike gebeurtenisse. $P(A) = \frac{1}{3}$ en $P(B) = \frac{3}{4}$
Bepaal:
- 10.1.1 $P(A \text{ en } B)$ (2)
- 10.1.2 $P(\text{ten minste EEN gebeurtenis plaasvind})$ (2)
- 10.2 Die waarskynlikheid dat dit in Junie op die Drakensberge sal sneeu, is 5%.
- Wanneer dit op die berge sneeu, is die waarskynlikheid dat die minimum temperatuur in Sentraal-Suid-Afrika tot onder 0°C sal daal, 72%.
 - As dit nie op die berge sneeu nie, is die waarskynlikheid dat die minimum temperatuur in Sentraal-Suid-Afrika tot onder 0°C sal daal, 35%.
- 10.2.1 Stel die gegewe inligting op 'n boomdiagram voor. Dui die waarskynlikhede wat met ELKE tak geassosieer word, duidelik aan. (3)
- 10.2.2 Bereken die waarskynlikheid dat die temperatuur in Sentraal-Suid-Afrika in Junie 2024 NIE tot onder 0°C sal daal NIE. (3)

Aktiwiteit 3

VRAAG 11

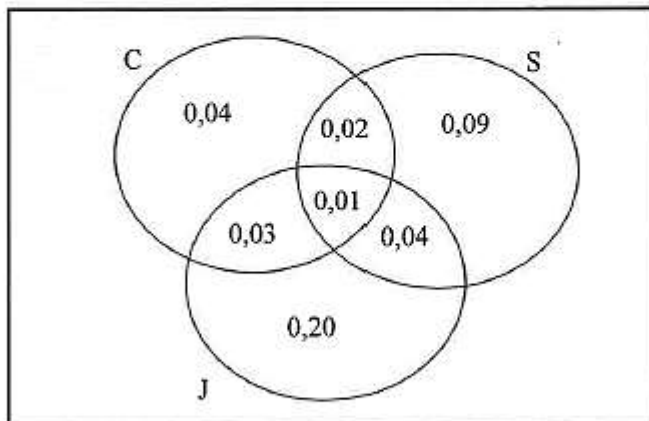
11.1 Twee gebeurtenisse, A en B, is sodanig dat:

- $P(A) = 0,4$
- $P(A \text{ of } B) = 0,52$
- A en B is onderling uitsluitend

Bepaal $P(B)$.

(2)

11.2 Die items wat 'n leerder oor 'n sekere tydperk by 'n snoepwinkel gekoop het, is aangeteken. Die waarskynlikheid dat die leerder 'n toebroodjie (S), 'n sjokolade (C) en 'n vrugtesap (J) koop, word in die Venn-diagram hieronder voorgestel.



11.2.1 Wat is die waarskynlikheid dat die leerder 'n toebroodjie sal koop?

(1)

11.2.2 Bereken die waarskynlikheid dat die leerder ten minste twee van die drie items sal koop.

(2)

11.2.3 Bereken die waarskynlikheid dat die leerder NIE een van die drie items sal koop NIE.

(2)

Aktiwiteit 4

VRAAG 10

10.1 'n Groep mense het aan 'n toets deelgeneem om 'n nuwe hoofpynpil te toets.

- 50% van die deelnemers het die hoofpynpil ontvang.
- 50% van die deelnemers het 'n suikerpil ontvang.
- $\frac{2}{5}$ van die groep wat die hoofpynpil ontvang het, is nie genees nie.
- $\frac{3}{10}$ van die groep wat die suikerpil ontvang het, is genees.

10.1.1 Stel die gegewe inligting op 'n boomdiagram voor. Dui op jou grafiek die waarskynlikheid wat met elke tak geassosieer word, asook die uitkomst, aan. (3)

10.1.2 Bepaal die waarskynlikheid dat 'n persoon wat willekeurig uit die groep gekies is, NIE genees sal word NIE. (2)

10.2 Drie gebeurtenisse, A, B en C, word in ag geneem:

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad \text{en} \quad P(A \text{ of } B) = \frac{13}{20}.$$

10.2.1 Is gebeurtenisse A en B onderling uitsluitend? Ondersteun jou antwoord met die nodige berekeninge. (2)

10.2.2 Bepaal $P(\text{net } C)$, indien dit verder gegee word dat
 $P(A \text{ of } C) = \frac{7}{10}, \quad P(A \text{ en } C) = \frac{2}{5} \quad \text{en} \quad 2P(B \text{ en } C) = P(A \text{ en } C).$ (3)

10.2.3 Bepaal die waarskynlikheid dat gebeurtenisse A, B of C NIE plaasvind NIE. (2)

Aktiwiteit 5

VRAAG 10

- 10.1 'n Sak het 7 geel balle, 3 rooi balle en 2 blou balle in. 'n Bal word willekeurig uit die sak gekies en nie teruggeplaas nie. 'n Tweede bal word dan gekies. Bepaal die waarskynlikheid dat van die twee balle wat gekies is, een rooi is en die ander blou is. (4)
- 10.2 Leerders by 'n koshuis kan 'n ete en 'n koeldrank vir middagete kies. Hulle keuses op 'n spesifieke dag is aangeteken en word in die gedeeltelik voltooide tabel hieronder getoon.

		ETE		TOTAAL
		TOEBROODJIE (T)	PASTA (P)	
KOELDRANK	Vrugtesap (V)	a	30	b
	Gebottelde Water (W)			
TOTAAL		200		250

Die waarskynlikheid dat 'n leerder vrugtesap en 'n toebroodjie op daardie dag gekies het, is 0,48.

- 10.2.1 Bepaal die getal leerders wat vrugtesap en 'n toebroodjie vir middagete op daardie dag gekies het. (1)
- 10.2.2 Is die keuse van vrugtesap onafhanklik van die keuse van 'n toebroodjie vir middagete op daardie dag? Toon AL jou berekeninge om jou antwoord te motiveer. (4)
[9]

Aktiwiteit 6

VRAAG 2

Eenhonderd vyf en sewentig rolprentkritici is genooi om 'n voorskou van 'n nuwe rolprent by te woon. Nadat hulle die rolprent gesien het, is 'n opname gedoen en die uitslae is in 'n tweerigting-gebeurlikheidstabel aangeteken.

	Ouderdom < 40	Ouderdom \geq 40	Totaal
Hou van die rolprent	65	37	102
Hou nie van die rolprent nie	b	31	a
Totaal	c	d	175

- 2.1 Bereken die waardes van a , b , c en d in die gebeurlikheidstabel. (4)
- 2.2 'n Rolprentkritikus word ewekansig gekies. Wat is die waarskynlikheid dat die kritikus jonger as 40 jaar oud was en nie van die rolprent gehou het nie? (2)
- 2.3 Is die gebeurtenisse, ouderdom van die kritikus en voorkeur vir die rolprent, onafhanklik van mekaar? Ondersteun jou antwoord met die nodige bewerkings. (4)
[10]

Bylaag A: Inligtingsblad

INLIGTINGSBLAD

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$A = P(1 + ni)$$

$$A = P(1 - ni)$$

$$A = P(1 - i)^n$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$T_n = a + (n - 1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}; r \neq 1$$

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}; -1 < r < 1$$

$$F = \frac{x[(1 + i)^n - 1]}{i}$$

$$P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$y = mx + c$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \tan \theta$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\text{In } \triangle ABC: \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\text{area } \triangle ABC = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 1 - 2\sin^2 \alpha \\ 2\cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$$

$$\hat{y} = a + bx$$

$$b = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum (x - \bar{x})^2}$$

Bylaag B: Eksamenriglyne

3. UITBREIDING VAN INHOUD/ONDERWERPE

Die doel van die verduideliking van die onderwerpe is om die onderwyser leiding te gee ten opsigte van die vlak en omvang van die onderwerpe wat vir eksamendoeleindes nodig is. Integrasie van onderwerpe word aangemoedig aangesien leerders Wiskunde as 'n holistiese dissipline moet sien. Dus kan vrae wat verskillende onderwerpe integreer, gevra word.

FUNKSIES

1. Kandidate moet in staat wees om funksie-notasie te gebruik en te interpreteer. In die onderrigproses moet leerders verstaan hoe $f(x)$ getransformeer moet word om $f(-x)$, $-f(x)$, $f(x+a)$, $af(x)$ en $x=f(y)$, waar $a \in R$, te verkry.
2. Trigonometriese funksies sal SLEGS in VRAESTEL 2 voorkom.

DIFFERENSIAALREKENING

1. Die volgende notasies kan vir differensiaalrekening gebruik word: $f'(x)$, D_x , $\frac{dy}{dx}$ of y' .
2. Ten opsigte van derdegraadse (kubiese) funksies, kan van kandidate verwag word om:
 - Die vergelyking van 'n derdegraadse funksie te bepaal.
 - Die aard van die stasionêre punte te bespreek, ingesluit lokale maksimum, lokale minimum en infleksiepunte.
 - Kennis van transformasies op gegewe funksies toe te pas om hul beelde te verkry.
3. Van kandidate word verwag om die grafiek van die afgeleide van 'n funksie te skets en te interpreteer.
4. Buite-oppervlakte en volume sal in die konteks van optimalisering eksamineer word.
5. Kandidate moet die formules vir die buite-oppervlakte en volume van regte prisma's ken. Hierdie formules sal NIE op die formuleblad gegee word NIE.
6. Indien 'n optimaliseringsvraag gebaseer is op die buite-oppervlakte en/of volume van 'n keël, sfeer en/of piramide, sal 'n lys van die relevante formules by die vraag gegee word. Daar sal van kandidate verwag word om die korrekte formule uit daardie lys te kies.

WAARSKYNLIKHEID

1. Afhanklike gebeurtenisse is eksamineerbaar, maar voorwaardelike waarskynlikhede is NIE deel van die sillabus NIE.
2. Afhanklike gebeurtenisse waar 'n item nie vervang word nie, is eksamineerbaar.



BIBLIOGRAFIE

1	KABV Dokument
2	Eksamenriglyne
3	DBE November 2008 – 2024 Vraestelle
4	DBE Junie en Feb/Mar 2009 – 2024 Vraestelle
5	“Mind The Gap” Studiegids
6	Mind Action Series Handboek
7	JENN 2022 – 2024 Handleidings